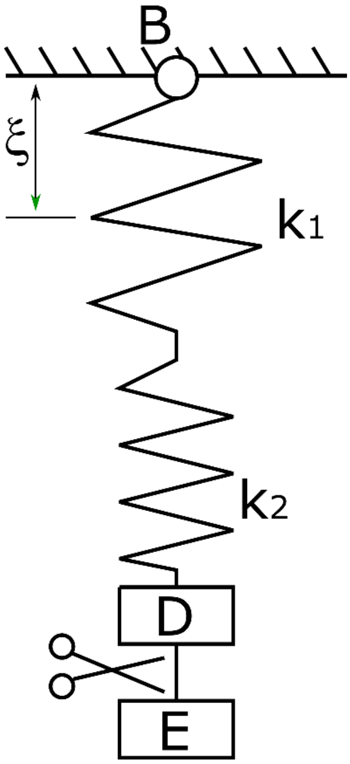
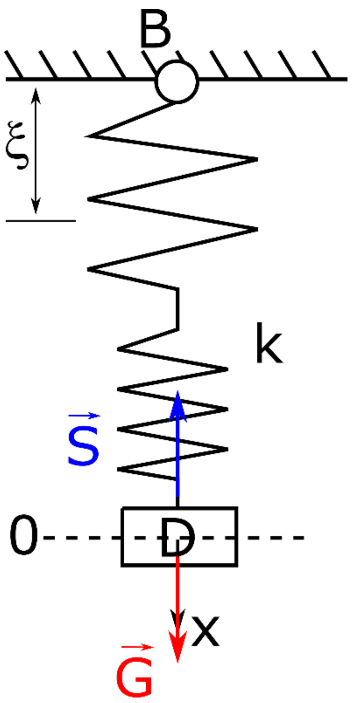
Drgania

Przykład 1. Znaleźć równanie ruchu ciężaru D o masie m_D odnosząc ruch do osi OX. Początek układu przyjąć w położeniu spoczynku ciężaru D. Pręt łączący ciężary uważać za nieważki i nieodkształcalny. W chwili kiedy pręt łączący ciężary D i E przetniemy (t=0), punkt B zaczyna wykonywać ruch według ξ. Położenie początkowe punktu na osi x odpowiada średniemu położeniu punktu B (ξ = 0). Dane: $m_D = 1kg, m_E = 2kg, \xi = 0{,}015\sin(18t)\ m, k_1 = 1200\ N/m, k_2 = 3600\ N/m$



Najpierw wyznaczamy sztywność zastępczą sprężyn układu. W tym wypadku sprężyny są połączone szeregowo.

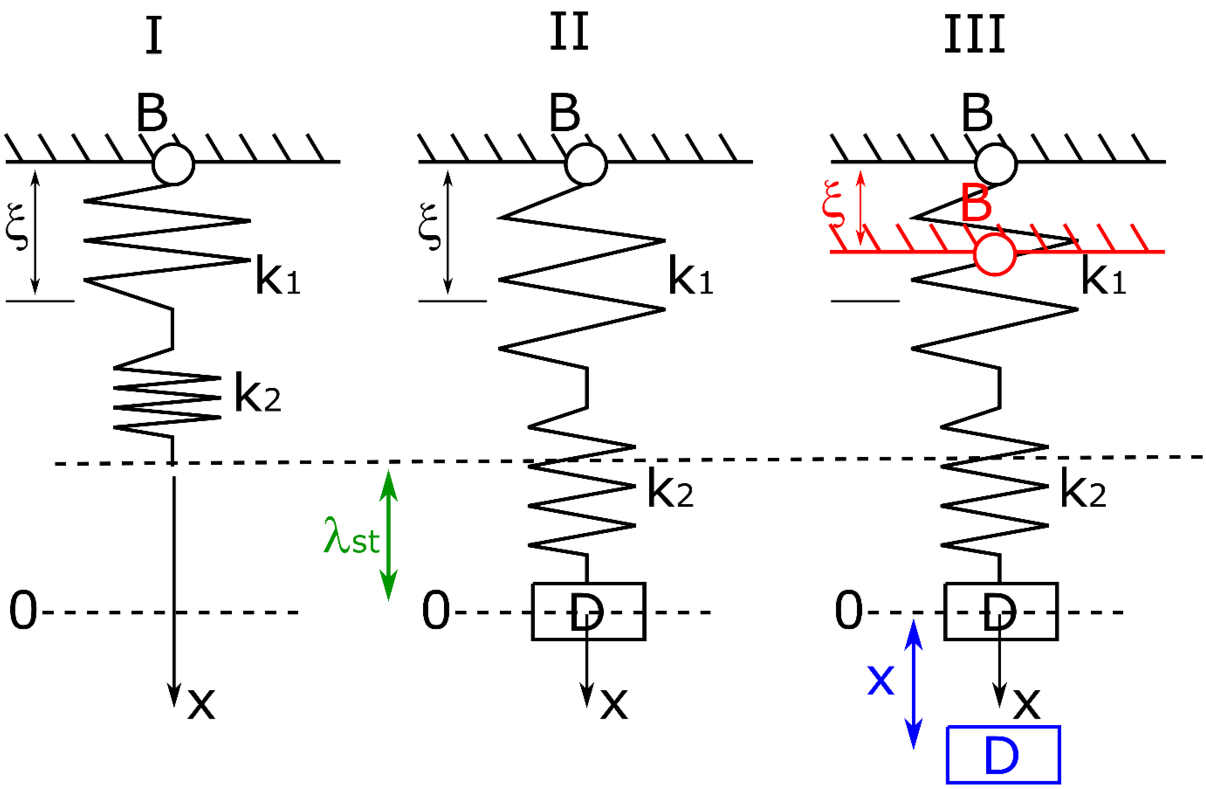
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{k_1 * k_2}{k_1 + k_2} = 900\ N/m$$



Następnie piszemy równanie dynamiki ruchu tego układu. Widzimy, że ruch odbywa się tylko wzdłuż osi X i dlatego musimy umieścić w nim wszystkie siły działające wzdłuż tej osi.

$$m_D\ddot{x} = G - S$$

Siłę w sprężynie możemy określić analizując poniższe rysunki



$$S = k(x + \lambda_{stD} - \xi)$$

$$m_D\ddot{x} = m_D g - k(x + \lambda_{stD} - \xi)$$

Należy wyznaczyć wartość λ_{stD}. Robimy to dla sytuacji, gdy układ jest w równowadze pod działaniem ciężaru D. Sprężyna statycznie rozciągnięta, nie ma ruchu, więc przyspieszenie jest równe 0.

$$0 = m_D g - k\lambda_{stD}$$

$$\lambda_{stD} = \frac{m_D g}{k}$$

$$m_D\ddot{x} = m_D g - k\left(x + \frac{m_D g}{k} - \xi\right)$$

$$m_D\ddot{x} = m_D g - kx - k\frac{m_D g}{k} + k\xi$$

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{m_D} + \frac{k\xi}{m_D}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m_D}x = \frac{k\xi}{m_D}$$

$$\ddot{x} + 900x = 13{,}5\sin(18t)$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe niejednorodne, które należy rozwiązać.

$$x = x^* + x^{**}$$

$$\ddot{x} + 900x = 0$$

$$x = e^{rt};\ \dot{x} = re^{rt};\ \ddot{x} = r^2e^{rt}$$

$$r^2e^{rt} + 900e^{rt} = 0 \backslash e^{rt}$$

$$r^2 + 900 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -3600 < 0$$

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = 0$$

$$\beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}30$$

$$x^* = e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t + C_2\sin\beta t)$$

$$x^* = C_1\cos 30t + C_2\sin 30t$$

$$\ddot{x} + 900x = 13{,}5\sin(18t)$$

$$x = a\sin(18t) + b\cos(18t)$$

$$\dot{x} = 18a\cos(18t) - 18b\sin(18t)$$

$$\ddot{x} = -324a\sin(18t) - 324b\cos(18t)$$

$$-324a\sin(18t) - 324b\cos(18t) + 900a\sin(18t) + 900b\cos(18t) = 13{,}5\sin(18t)$$

$$576a\sin(18t) + 576b\cos(18t) = 13{,}5\sin(18t)$$

$$b = 0$$

$$576a = 13{,}5 \Rightarrow a = 0{,}023$$

$$x^{**} = 0{,}023\sin(18t)$$

$$x = x^{*} + x^{**}$$

$$x = C_1\cos 30t + C_2\sin 30t + 0{,}023\sin(18t)$$

Wyznaczamy stałe z warunków początkowych

$$x(0) = \lambda_{stDE} - \lambda_{stD}$$

$$x(0) = \lambda_{stE} = \frac{m_E g}{k}$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$x(0) = C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{m_E g}{k} = 0{,}022$$

$$\dot{x} = -30C_1\sin 30t + 30C_2\cos 30t + 0{,}414\cos(18t)$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow 30C_2 + 0{,}414 = 0 \Rightarrow C_2 = -0{,}014$$

$$x = 0{,}022\cos 30t - 0{,}014\sin 30t + 0{,}023\sin(18t)$$