Kinematyka punktu

Kinematyka to część mechaniki zajmująca się ruchem ciał, bez wchodzenia w związek między ruchem badanego ciała (w szczególności punktu) a działającymi na nie siłami.

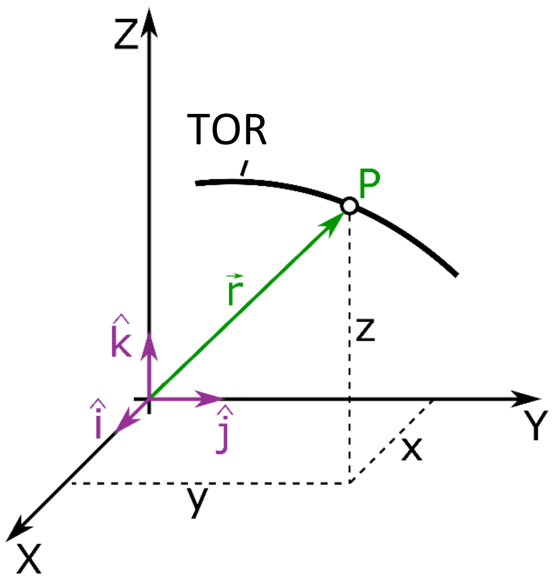
W przypadku kinematyki rozważymy, co dzieje się z ciałem w czasie. Ten typ relacji opiszemy jako geometrię ruchu.

Ruch ciała - zmiana położenia tego ciała względem innego nieruchomego ciała (ciała odniesienia). W przypadku mechaniki za ciało odniesienia przyjmuje się zwykle Ziemię.

System odniesienia - system, który jest ustalony i powiązany z ciałem odniesienia.

Najpopularniejszym układem odniesienia jest prostokątny układ współrzędnych (przestrzeń euklidesowa).

Przestrzeń euklidesowa



x, y, z-współrzędne ruchomego punktu P w odniesieniu do stałego układu współrzędnych (układu odniesienia).
Aby opisać ruch tego punktu, konieczne jest określenie, jak poszczególne współrzędne zmieniają się w czasie.

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t)$$

Powyższe równania nazwiemy równaniami kinematycznymi ruchu.

<u>TOR</u> - linia, po której punkt P porusza się w przestrzeni.

Równanie parametryczne toru punktowego - w równaniu parametrem jest czas. Po usunięciu z równań czasu otrzymujemy relacje pomiędzy współrzędnymi x, y, z (czyli drogą ruchu).

Możemy także opisać ruch punktu w czasie za pomocą promienia wektora $\vec{r}$ zależnego o czasu $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Składowe wektora

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = r_x\hat{\imath} + r_y\hat{\jmath} + r_z\hat{k}$$

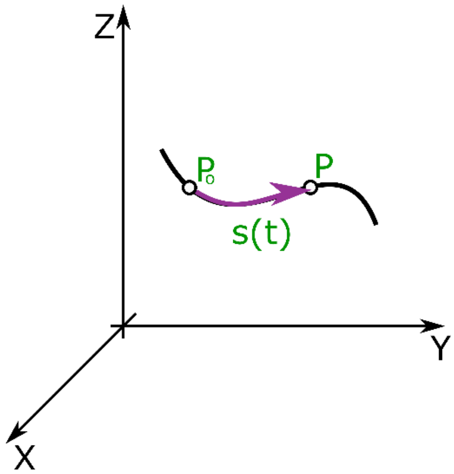
$$r_x = x(t); \quad r_y = y(t); \quad r_z = z(t)$$

$$\vec{r} = \hat{\imath}(t) + \hat{\jmath}(t) + \hat{k}(t)$$

gdzir $\hat{\imath}$; $\hat{\jmath}$; $\hat{k}$ są to wersory układu odniesienia.

Wiemy doskonale, że nie zawsze musimy poruszać się tylko w układzie prostokątnym, a w niektórych przypadkach lepiej jest pracować w innym układzie współrzędnych. Zacznijmy więc od opisu ruchu punktu na ścieżce za pomocą współrzędnej łukowej.

Gdy znanny jest tro ruchu punktu P możliwe jest opisanie położenia tego punktu poprzez podanie współrzędnych s mierzonych wzdłuż toru od pewnego początkowego punktu P_o.



s - współrzędna łuku równa długości łuku P_oP,

W momencie gdy punkt P się porusza, wówczas s staje się funkcją czasu

$$s = f(t)$$

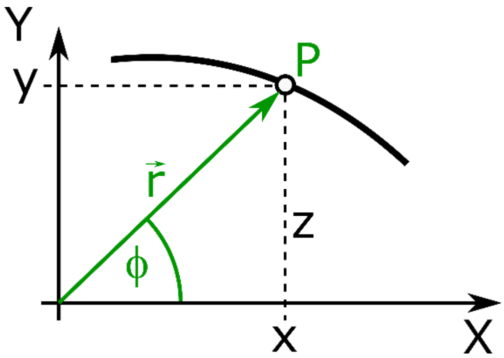
Równanie ruchu punktu na torze

Równania ruchu punktu we współrzędnych krzywoliniowych

Oprócz współrzędnych prostokątnych tor punktu można zdefiniować za pomocą współrzędnych krzywoliniowych.

Układ biegunowy na płaszczyźnie

Zaczniemy od układu biegunowego na płaszczyźnie. W takim układzie punkt porusza się tylko w jednej płaszczyźnie, a jego chwilowe położenie można określić poprzez podanie długości promienia wodzącego $\vec{r}$ i kąta ϕ z osią biegunową. Oś biegunowa to oś, dla której ϕ = 0.



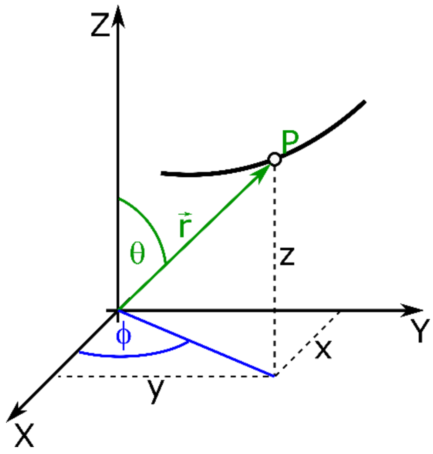
$$r = f_1(t);\ \phi = f_2(t)$$

Przejście ze współrzędnych biegunowych do układu kartezjańskiego	**Przejście z układu kartezjańskiego do układu biegunowego**
$\boldsymbol{x = r\cos\phi}$ $\boldsymbol{y = r sin\phi}$	$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$ $\boldsymbol{\phi = arctan\frac{y}{x}}$

Układ biegunowy w przestrzeni (sferyczny)

Pozycja punktu w przestrzeni jest opisana z pomocą wektora $\vec{r}$, jego długości i kątów θ and ϕ.

Równanie ruchu



$$r = f_1(t);\ \phi = f_2(t);\ \theta = f_3(t)$$

Przejście ze współrzędnych sferycznych do układu kartezjańskiego	**Przejście z układu kartezjańskiego u współrzędnych sferycznych**
$$\boldsymbol{x = r\sin\theta\cos\phi}$$ $$\boldsymbol{y = r\sin\theta\, sin\phi}$$ $$\boldsymbol{z = r\cos\theta}$$	$$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$ $$\boldsymbol{\phi = arccos\frac{y}{x}}$$ $$\boldsymbol{\theta = arccos\frac{z}{r}}$$

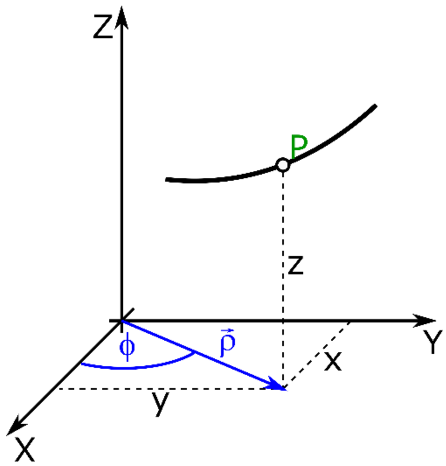
<u>Walcowy układ współrzędnych</u>

Pozycja punktu jest zdefiniowana przez:

z – współrzędną po osi z

ρ - dystans od osi z

ϕ - kąt



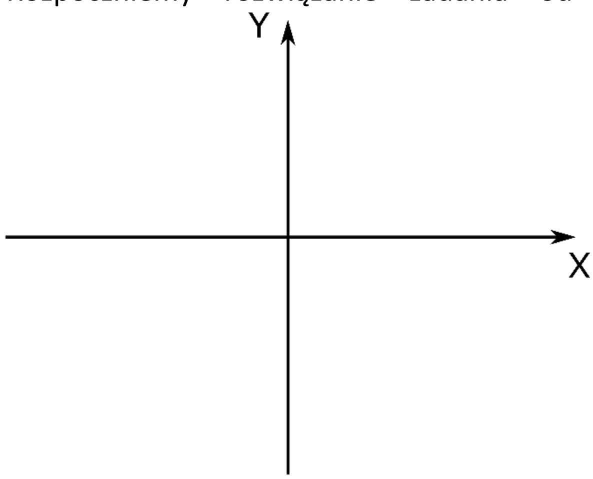
$$z = f_1(t);\ \rho = f_2(t);\ \phi = f_3(t)$$

Przejście ze współrzędnych walcowych do układu kartezjańskiego	**Przejście z układu kartezjańskiego do współrzędnych walcowych**
$$x = \rho \cos \phi$$ $$y = \rho sin\phi$$ $$z = z$$	$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$ $$\phi = arctan\frac{y}{x}$$ $$z = z$$

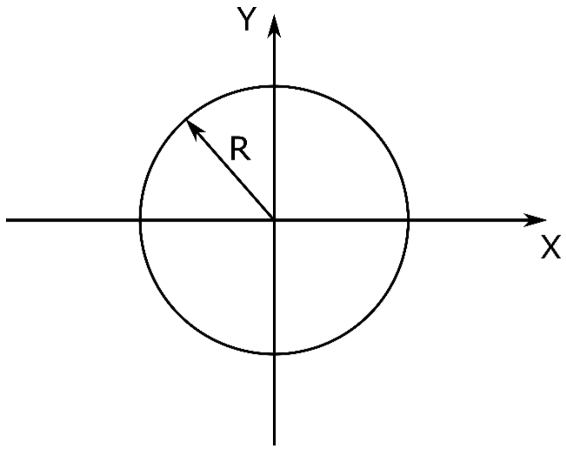
Przykład 1. Tor punktu P to okrąg o promieniu R. Opisz ruch tego punktu za pomocą wektora promienia $\vec{r}$. Przyjąć środek okręgu w środku układu współrzędnych.

Tor punktu P to okrąg o promieniu R. Opisz ruch tego punktu za pomocą wektora promienia r $^{\rightarrow}$. Weź środek okręgu w środku układu współrzędnych.

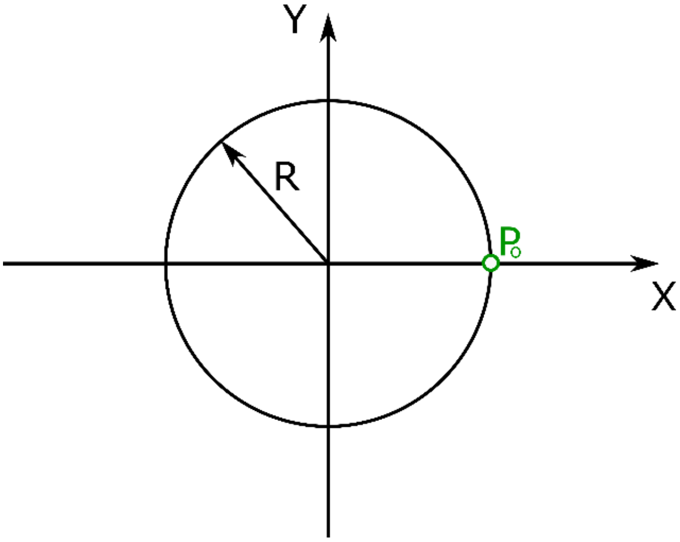
Rozpoczniemy rozwiązanie zadania od narysowania układu współrzędnych.

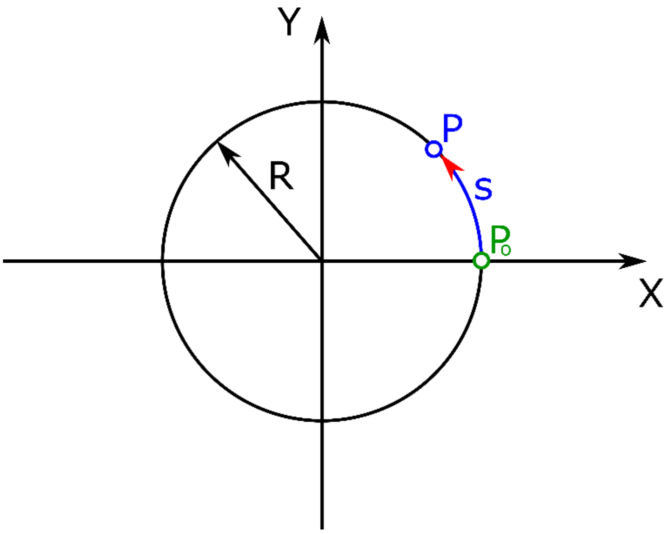


Następnie, zgodnie z danymi w zadaniu, umieśćmy środek koła w środku naszego układu współrzędnych.



Załóżmy, że punkt zaczął się przesuwać od punktu P_o, który leży na osi X.





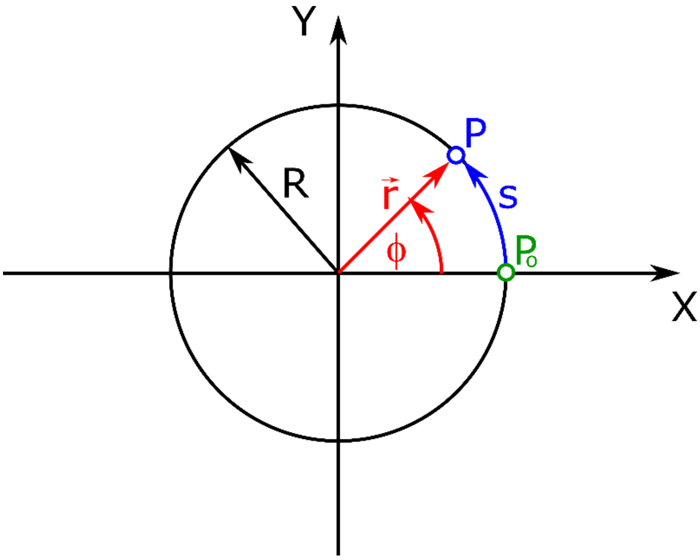
Chwilowe położenie punktu jest określane przez określenie współrzędnych łuku s równych długości łuku P_oP.

Wiemy, że

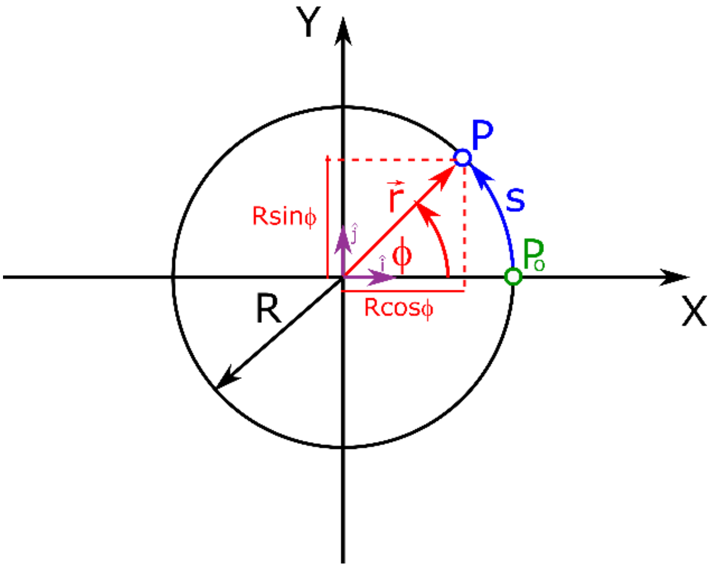
$$s = r * \phi$$

$$s = r * \phi(t)$$

$\phi(t)$ – kąt obrotu wektora promienia



teraz przechodząc ze współrzędnych kartezjańskich otrzymujemy



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi = arctan\frac{y}{x}$$

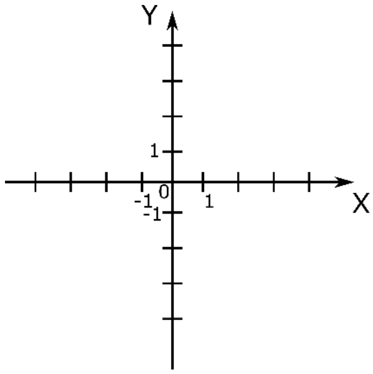
Ostatecznie możemy zapisać

$$s = r * \phi$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} * \ arctan\frac{y}{x}$$

Example 2. Zadane są równania ruchu punktu P poruszającego się w płaszczyźnie O_{xy}. $x = 3 + 2t; y = -2t$, określ tor ruchu punktu.

Na początku, podobnie jak w poprzednim zadaniu, wstawmy układ współrzędnych.



Następnie znajdźmy równanie trajektorii. Widzimy, że równania podane w zadaniu są parametrycznymi równaniami ruchu, dzięki czemu wiemy, jakie jest położenie punktu w zadanym czasie. Dlatego naszym parametrem zmiennym jest czas. Aby znaleźć równanie, które pokazuje nam trajektorie ruchu punktu, musimy pozbyć się czasu z podanych równań.

$$t = -\frac{y}{2} \rightarrow x = 3 + 2\left(-\frac{y}{2}\right) = 3 - y$$

Możemy zapisać równanie toru ruchu punktu następująco

$$x = 3 - y$$

lub

$$y = 3 - x$$

Sprawdźmy, gdzie w chwili t = 0 znajduje się punkt

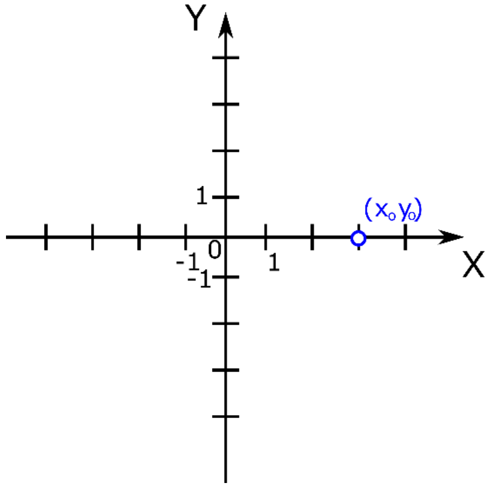
$$x = 3 + 2t$$

$$y = -2t$$

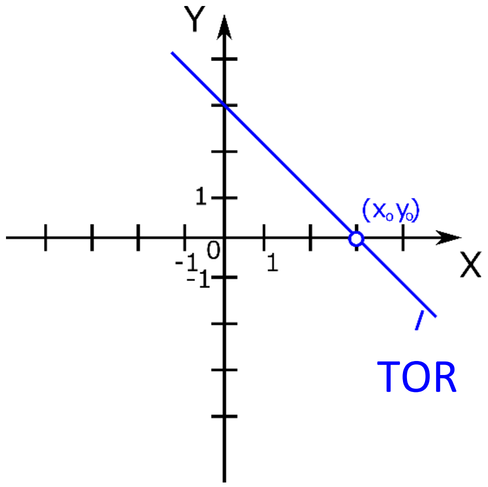
W tym celu w zadanych równaniach parametrycznych ruchu zmieniamy czas t na wartość równą 0.

$$x(t = 0) = 3$$

$$y(t = 0) = 0$$



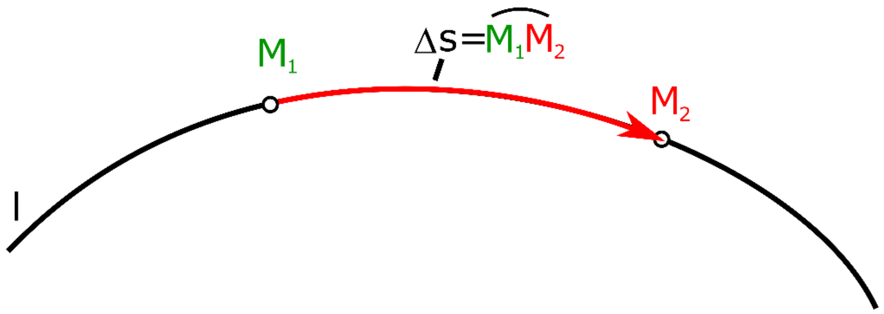
Na koniec wystawimy na wykresie również wyznaczony tor ruchu punktu



PRĘDKOŚĆ I PRZYSPIESZENIE

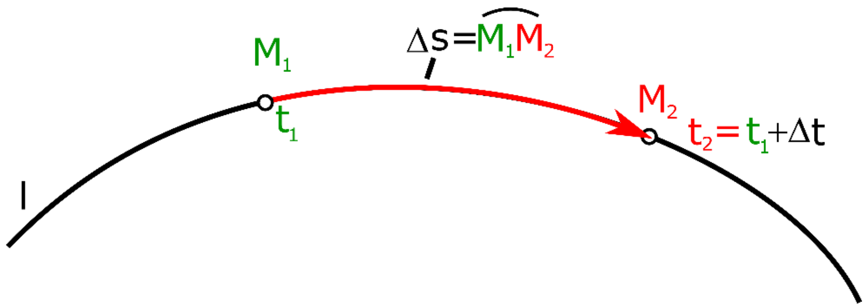
Prędkość

Rozpocznijmy nasze rozważania od prędkości punktu materialnego. Rozważmy ruch punktu M z punktu M_1 do punktu M_2 Można zauważyć, że droga pokonana przez ten punkt jest równa pewnej Δs równej długości łuku M_1M_2.

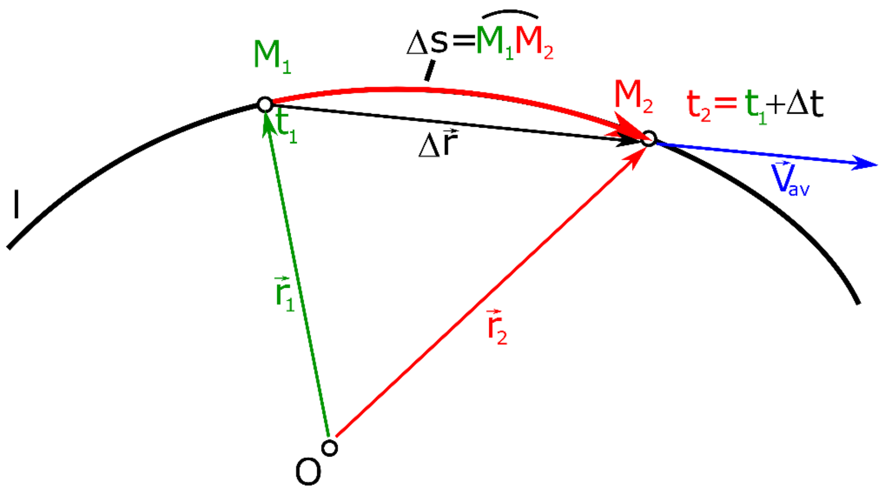


Załóżmy, że punkt znajduje się w położeniu M_1 w czasie t_1 a w położeniu M_2 dla czasu t_2, gdzie:

$$t_2 = t_1 + \Delta t$$



Pozycja punktu w M_1 i M_2 może opisana przy pomocy wektorów $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$. Można zauważyć, że określenie geometrycznego przyrostu wektora $\Delta\vec{r}$ będzie miało istotne znaczenie dla określenia zmiany położenia punktu.

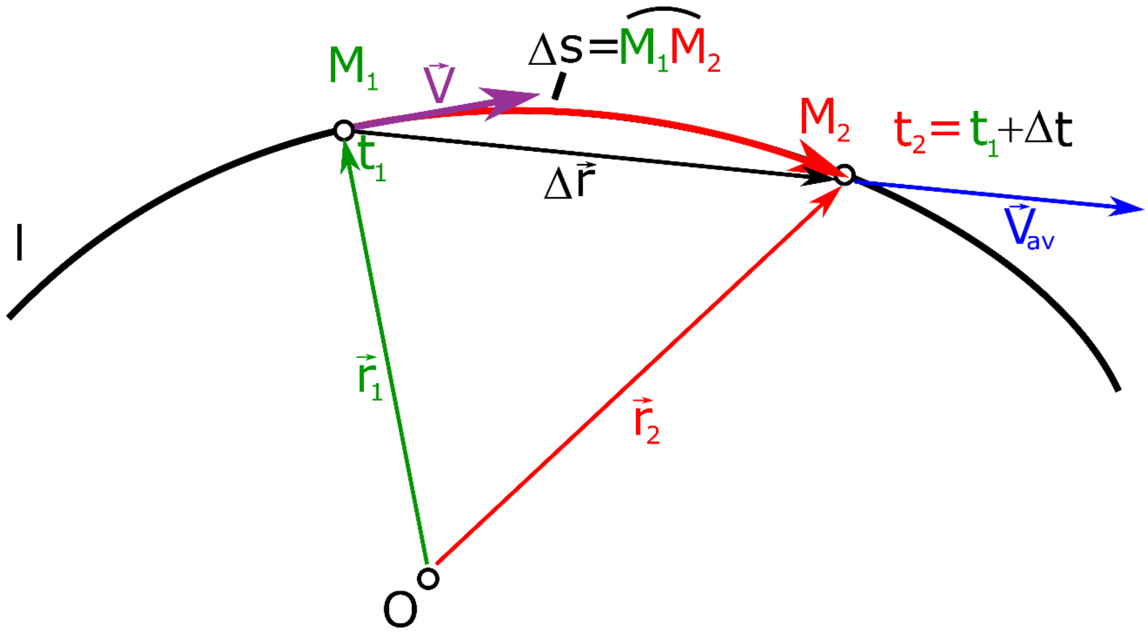


Przyrost ten możemy zapisać następująco.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2(t_2) - \vec{r}_1(t_!)$$

Stosunek przyrostu wektora $\Delta\vec{r}$ do czasu w którym ten przyrost nastąpił będziemy nazywać prędkością średnią.

$$\vec{V}_{av} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$



Prędkość średnia $\vec{V}_{av}$ ma kierunek cięciwy. We wszystkich praktycznych pomiarach zawsze określamy wartość średnią, która zależy od odległości między punktami M_1 i M_2. Zależy to od ruchu punktu i doboru punktów na ścieżce ruchu.

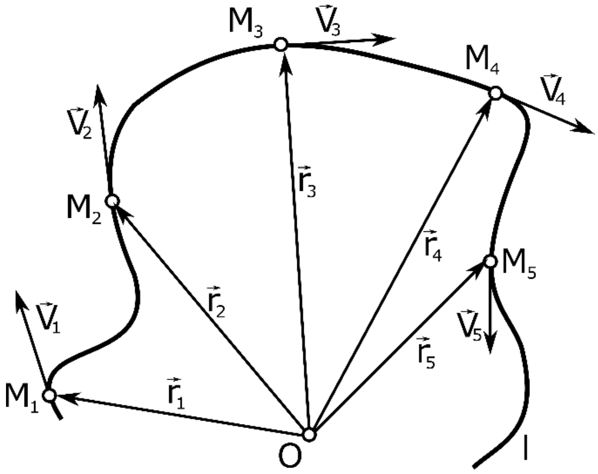
Oprócz prędkości średniej istniej pojęcie prędkości chwilowej $\vec{V}$. Wektor prędkości chwilowej będzie istniał jeśli promień $\vec{r}$ jest różniczkowalny. Jest to pojęcie abstrakcyjne, ale ma ogromne znaczenie i pozwala jednoznacznie opisać ruch w danym momencie.
Jeśli założymy, że $\Delta t \to 0$ i $\Delta s \to min$, wówczas cięciwa łuku będzie dążyła do stycznej. Stąd wektor prędkości będzie również styczny do toru ruchu.

Prędkość chwilowa

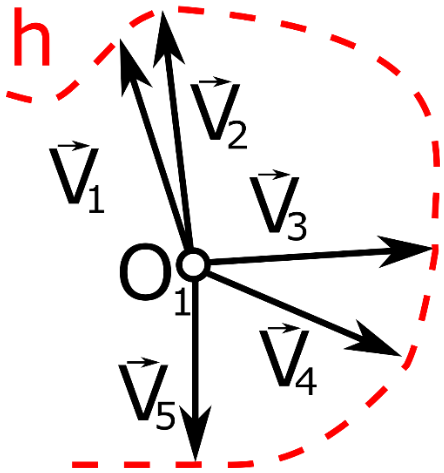
$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

HODOGRAF PRĘDKOŚCI

Załóżmy, że ścieżka l ruchomego punktu M opisuje koniec wektora $\vec{r}$ którego początkiem jest punkt O. Prędkości $\vec{V_i}$ w kolejnych punktach M_i są styczne do tego toru ruchu.

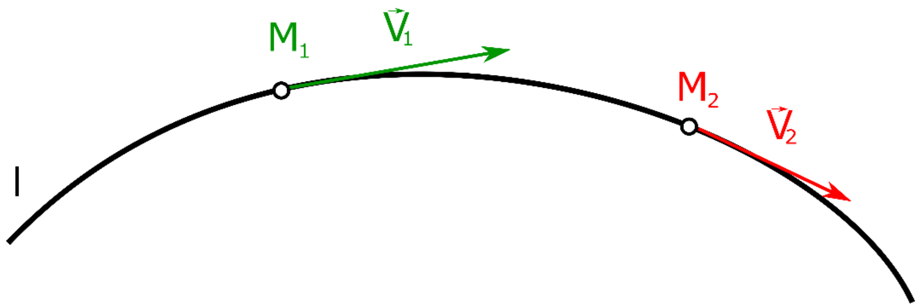


Jeśli przesuniemy wektory prędkości równolegle do wspólnego punktu O_1, to końce tych wektorów będą leżeć na prostej oznaczonej h, zwanej HODOGRAFEM prędkości danego punktu M.



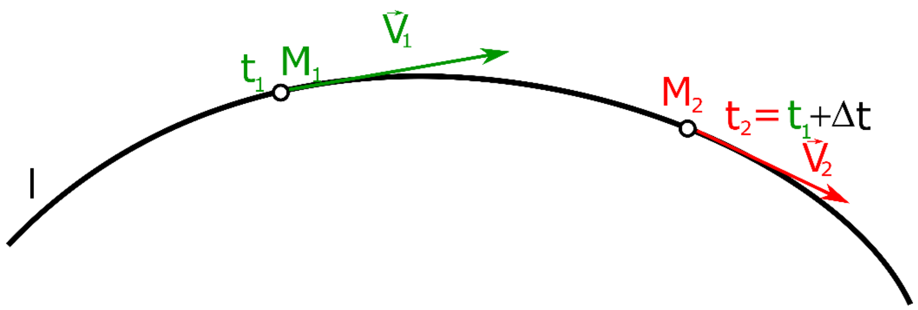
Przyspieszenie

Załóżmy, że punkt porusza się po krzywej l, z prędkością $\vec{V}_1$ w M_1 i z prędkością $\vec{V}_2$ w M_2.

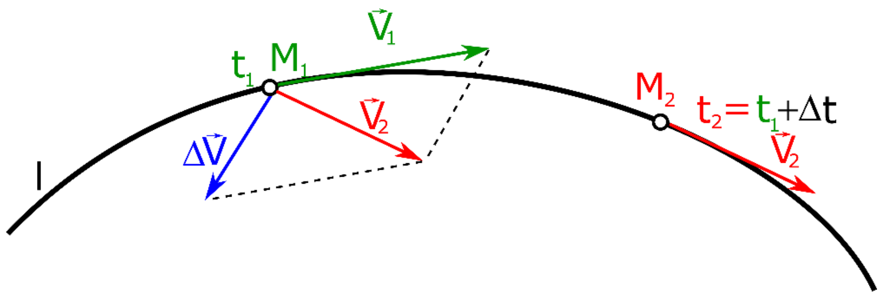


Załóżmy, że punkt znajduje się w M_1 w czasie t_1 i w M_2 w czasie t_2, gdzie:

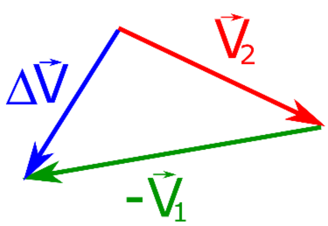
$$t_2 = t_1 + \Delta t$$



Między punktami M_1 i M_2 następuje przyrost prędkości.



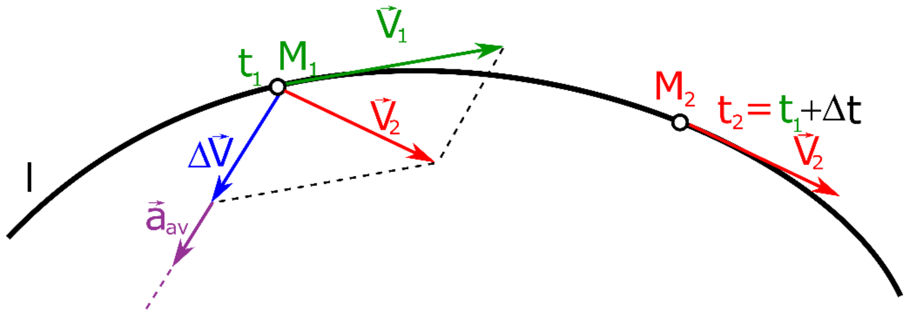
$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$$



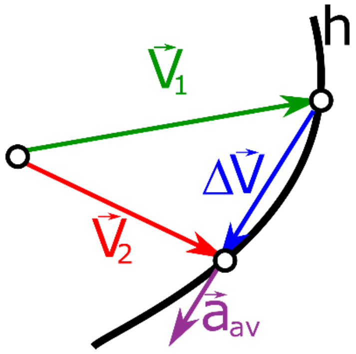
Stosunek przyrostu prędkości $\vec{V}$ do czasu w którym ten przyrost nastąpił nazywamy przyspieszeniem średnim.

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

$\vec{a}_{av}$ ma kierunek przyrostu prędkości $\Delta\vec{V}$, przy czym jego wartość i zwrot zależą od przedziału czasu, w którym zostało to przyspieszenie wyznaczone Δt.



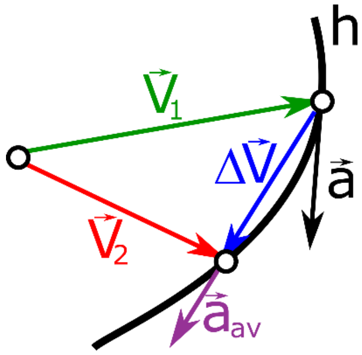
Oprócz przyspieszenia średniego, mamy również przyspieszenie chwilowe $\vec{a}$. W celu wyznaczenia przyspieszenia chwilowego posłużymy się hodografem prędkości



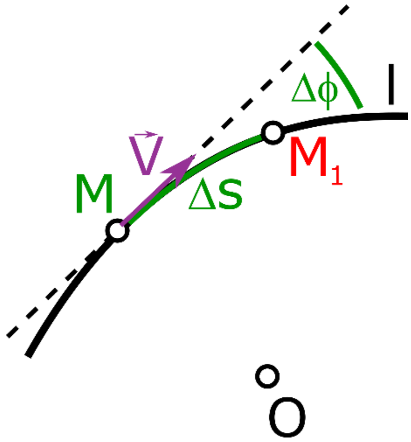
Wektor przyspieszenia chwilowego jest skierowany wzdłuż stycznej do hodografu prędkości.

Przyspieszenie chwilowe

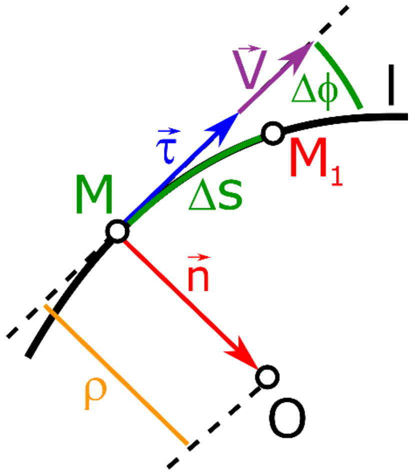
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$



RUCH KRZYWOLINIOWY



W przypadku gdy torem ruchu punktu jest krzywa płaska, jej kierunkami naturalnymi są kierunek styczny i normalny.



ρ - promień krzywizny leżący na kierunku wersora normalnego $\hat{n}$.

$\vec{V}$ - prędkość na kierunku wersora stycznego $\hat{\tau}$

$$\rho = \frac{1}{C}$$

C – krzywizna,

$$C_{av} = \frac{\Delta\phi}{\Delta s}$$

C_{av} – średnia krzywizna łuku MM_1

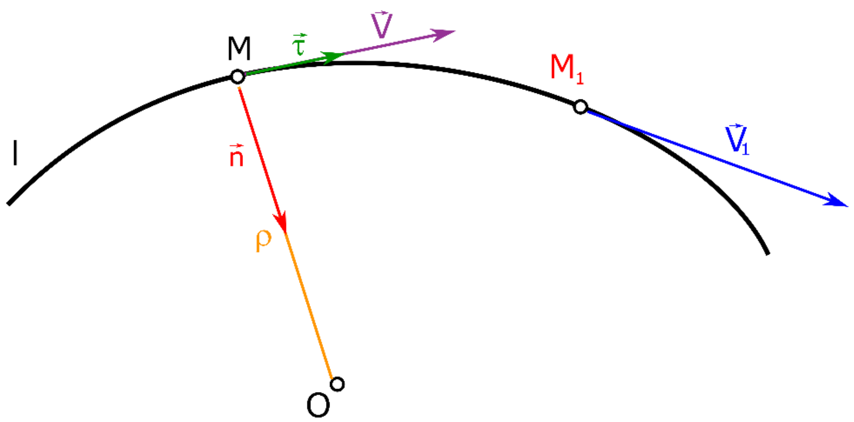
krzywizna w punkcie

$$C = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}$$

PRZYSPIESZENIE STYCZNE I NORMALNE

Przyspieszenie $\vec{a}$ punktu M poruszającego się po krzywej przestrzennej musi leżeć w płaszczyźnie ściśle stycznej do toru ruchu. Jest to spowodowane tym, że przyspieszenie jako pochodna prędkości $\vec{V}$, musi być styczne do hodografu prędkości tego punktu. Ponadto wektor prędkości jest zawsze styczny do krzywej, po której porusza się punkt

Załóżmy, że punkt porusza się wzdłuż krzywej od punktu M do punktu M_1. Punkt ten ma prędkość $\vec{V}$ w M i prędkość $\vec{V}_1$w M_1. Wprowadźmy dwa wektory jednostkowe do naszego układu, styczny $\hat{\tau}$, wzdłuż kierunku prędkości $\vec{V}$ i normlany $\hat{n}$, skierowany do środka krzywizny w danym punkcie.

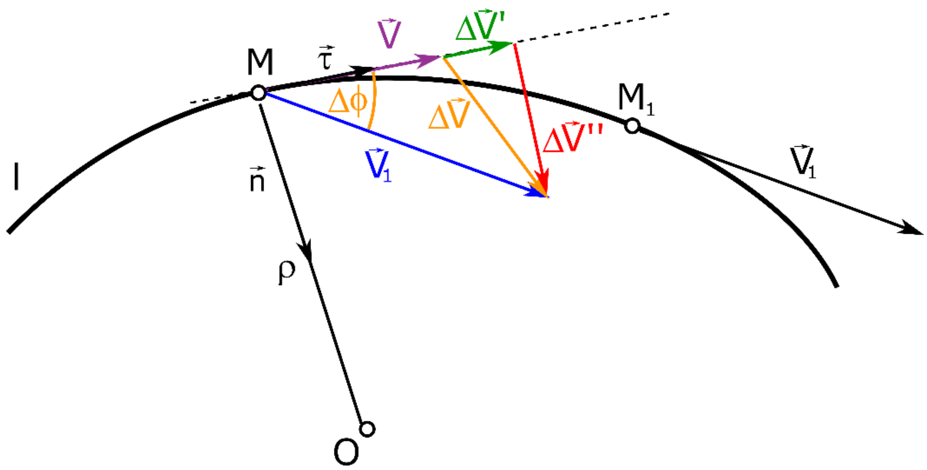


Przyrost wektora prędkości będzie równy

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}$$

po przekształceniu wyrażenia otrzymujemy,

$$\vec{V}_1 = \vec{V} + \Delta\vec{V}$$



Dalej możemy zauważyć, że wektor $\Delta\vec{V}$ możemy zapisać również jako sumę dwóch wektorów $\Delta\vec{V'}$ i $\Delta\vec{V}"$, które będą leżały odpowiednio na kierunku stycznym i normalnym.

$$\Delta\vec{V} = \Delta\overrightarrow{V'} + \Delta\overrightarrow{V"} = \Delta V'\hat{\tau} + \Delta V"\hat{n}$$

Wcześniej zapisaliśmy ze przyspieszenie $\vec{a}$ jest równe:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

Zapiszmy powyższe równanie z pomocą właśnie wprowadzonych wektorów.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{V'}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{V"}}{\Delta t} = \hat{\tau}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V'}{\Delta t} + \hat{n}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V"}{\Delta t} = \hat{\tau}a_\tau + \hat{n}a_n$$

Powyższe równanie można ogólnie zapisać w następujący sposób.

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Całkowite przyspieszenie jest zatem sumą przyspieszenia stycznego i normalnego.

Na podstawie powyższego wniosku spróbujmy zapisać obie składowe przyspieszenia korzystając ze znanych prędkości w punktach M i M_1.

$$\Delta V' = V_1\cos\Delta\phi - V$$

$$\Delta V" = V_1\sin\Delta\phi$$

Zacznijmy od składowej przyspieszenia, w kierunku stycznym

$$\vec{a}_\tau = \hat{\tau}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V'}{\Delta t} = \hat{\tau}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V_1\cos\Delta\phi - V}{\Delta t} = \hat{\tau}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V_1 - V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}\hat{\tau}$$

$$\text{if } \Delta\phi\to 0 \; w\acute{o}wczas\; \cos\Delta\phi\approx 1; \qquad V_1 - V = \Delta V$$

Ostatecznie równanie będzie miało postać,

$$\vec{a}_\tau = \frac{dV}{dt}\hat{\tau}$$

Kiedy już wiemy, jak możemy znaleźć przyspieszenie styczne, zróbmy to samo dla składowej normalnej przyspieszenia.

$$\text{if } \Delta\phi\to 0 \; w\acute{o}wczas\; \sin\Delta\phi\approx\Delta\phi;$$

$$\vec{a}_n = \hat{n}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V"}{\Delta t} = \hat{n}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V_1\sin\Delta\phi}{\Delta t} = \hat{n}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{V_1\Delta\phi}{\Delta t} = \hat{n}\lim_{\Delta t\to 0}V_1\frac{\Delta\phi}{\Delta t}*\frac{\Delta s}{\Delta s}$$
$$= \hat{n}\lim_{\Delta t\to 0}V_1 * \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta s} * \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Widzimy, że:

$$\lim_{\Delta t\to 0}V_1 = V;$$

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{1}{\rho};$$

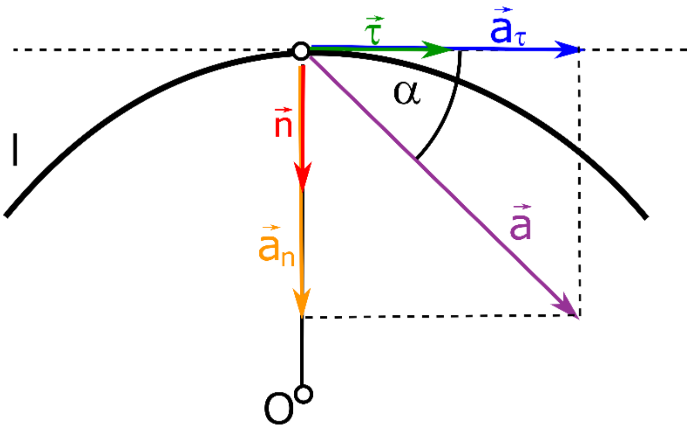
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = V;$$

Wówczas:

$$\vec{a}_n = \hat{n} \lim_{\Delta t \to 0} V_1 * \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} * \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \hat{n} * V * \frac{1}{\rho} * V = \hat{n} \frac{V^2}{\rho}$$

Ostatecznie, biorąc pod uwagę obie składowe całkowitego przyspieszenia, otrzymujemy następujący wzór

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dV}{dt} \hat{\tau} + \hat{n} \frac{V^2}{\rho}$$



$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \frac{V^4}{\rho^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{a_n}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{a_\tau}{a}$$

PRZYSPIESZENIE I PRĘDKOŚĆ W PROSTOKĄTNYM UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

Parametryczne równania ruchu przyjmą następującą postać.

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t)$$

In order to obtain the velocity, one must differentiate once the above parametric equations of motion. Then we get projections of the velocity vector on the appropriate axes of the coordinate system.

Aby znaleźć prędkość punktu na podstawie jego parametrycznych równań ruchu należy jednokrotnie zróżniczkować powyższe parametryczne równania ruchu. W ten sposób otrzymamy rzuty wektora prędkości na odpowiednie osie układu współrzędnych.

$$\dot{x} = V_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\dot{y} = V_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\dot{z} = V_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath} + V_z\hat{k} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}$$

Następnie wystarczy obliczyć moduł wektora prędkości zgodnie z równaniem.

$$V = \left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Ponadto, aby wyznaczyć przyspieszenie należy zróżniczkować jednokrotnie otrzymane wcześniej równania rzutów prędkości na poszczególne osie. W ten sposób uzyskamy rzuty wektora przyspieszenia na odpowiednie osie układu współrzędnych.

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$$

$$a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

Następnie wystarczy obliczyć moduł wektora przyspieszenia zgodnie z równaniem.

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Aby w pełni wyznaczyć przyspieszenie punktu, należy również znaleźć wartości jego składowych stycznej i normalnej. Poniżej znajdują się obliczenia składowych przyspieszenia dla układu płaskiego.

$$a_\tau = \frac{|dV|}{dt} = \dot{V} = \frac{2\dot{V}_xV_x + 2\dot{V}_yV_y}{2\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} = \frac{a_xV_x + a_yV_y}{V}$$

$$a_n = -\frac{1}{V}(a_yV_x - a_xV_y)$$