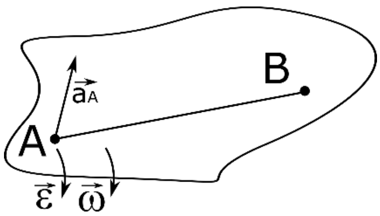
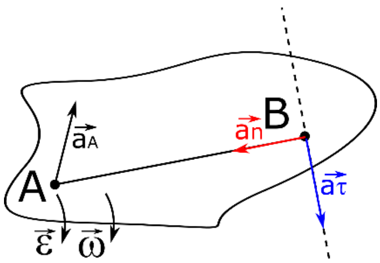
Prędkości i przyspieszenia w ruchu płaskim

Jeśli mamy ciało sztywne i znamy przyspieszenie jednego z jego punktów, a dodatkowo mamy informacje o prędkości kątowej i przyspieszeniu kątowym tego ciała, to możemy wyznaczyć przyspieszenia innych punktów tego ciała metodą superpozycji.

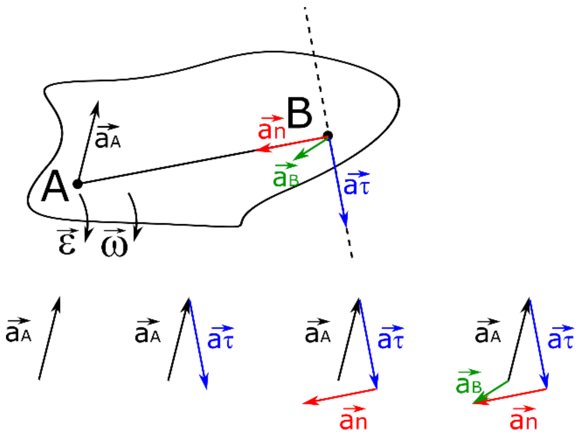
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{n} + \vec{a}_{BA}^{\tau}$$



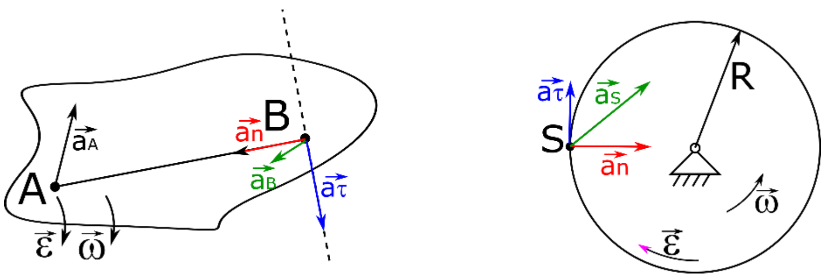
najpierw bierzemy punkt, dla którego znamy przyspieszenie, jako punkt obrotu. Nanosimy wektory przyspieszenia stycznego i normalnego względem tego punktu.



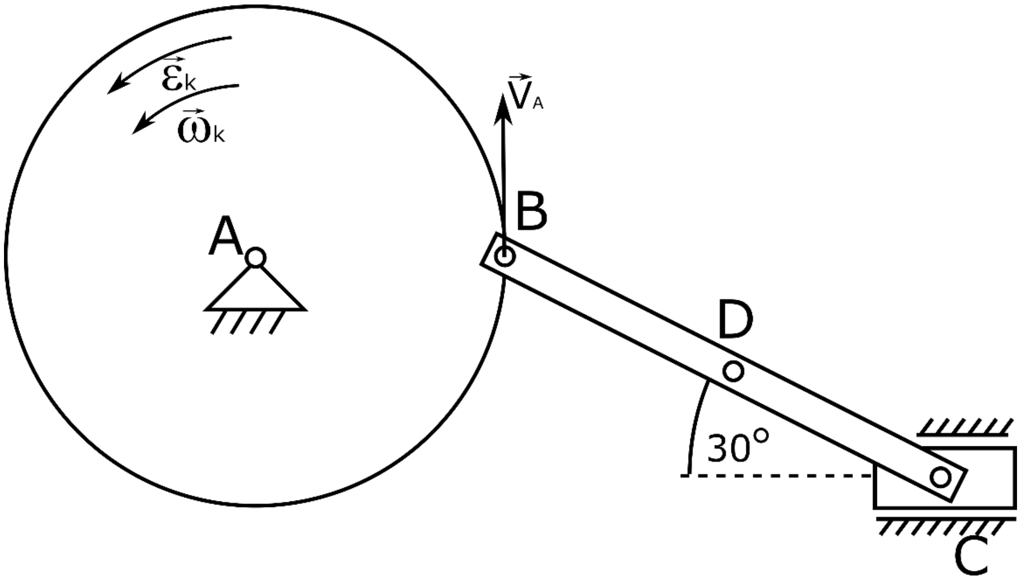
Następnie konstruujemy łańcuch przyspieszeń, jak pokazano na poniższym rysunku, i znajdujemy przyspieszenie punktu, którego szukamy



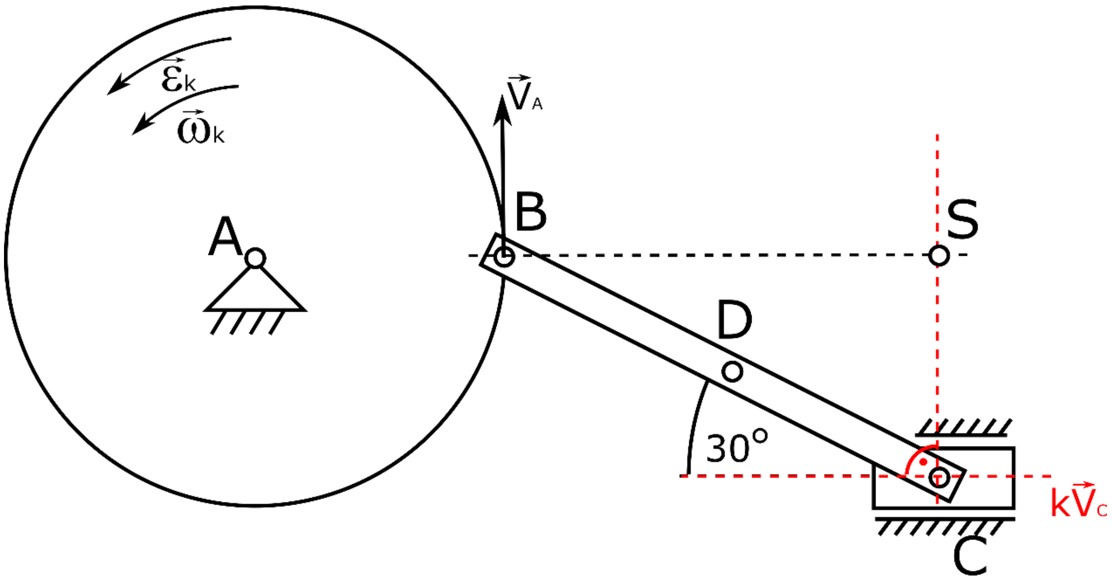
Na poniższym rysunku pokazano podobieństwo metody superpozycji w ruchu płaskim do ruchu obrotowego.



Przykład1. Dla zadanego mechanizmu wyznaczyć prędkości i przyspieszenia dla punktów B, C i D.
Dane: $\omega_k = 1$, $\varepsilon_k = 1$, AB=2, BC=4, BD=2.

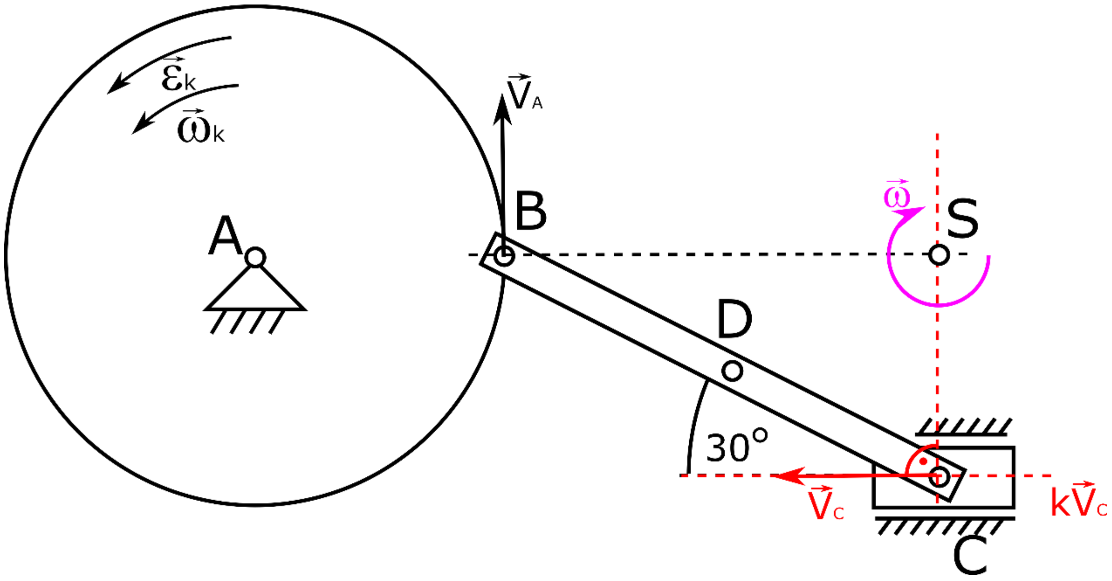


Najpierw zajmiemy się prędkościami. Obliczamy prędkość punktu B, wykorzystując fakt, że znajduje się on na obwodzie koła. Dla pozostałych punktów użyjemy metody chwilowego środka obrotu. Analiza rysunku pokazuje, że znamy kierunek ruchu punktu C. Będzie to kierunek poziomy, więc wektor prędkości tego punktu musi również leżeć w tym kierunku. Następnie rysujemy proste prostopadłe do znanych kierunków prędkości. Na przecięciu tych prostych znajdujemy punkt S zwany chwilowym środkiem obrotu.



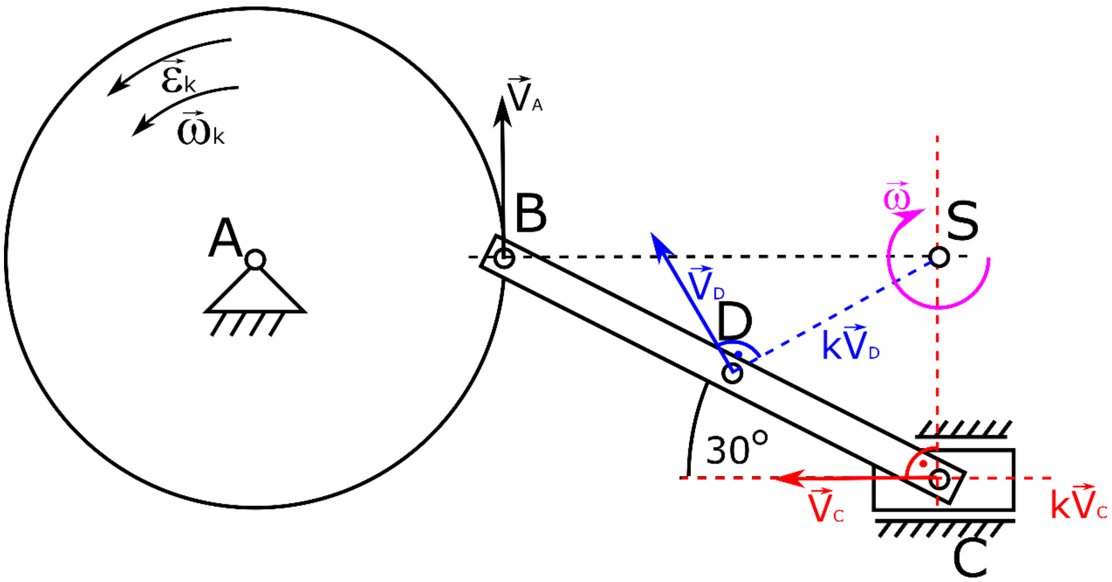
$$V_B = \omega_k * AB = 1 * 2 = 2$$

$$V_B = \omega * BS = \omega * BC * \cos 30° \Rightarrow \omega = \frac{V_B}{4 * \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Po wyznaczeniu prędkości punktu B i znalezieniu prędkości kątowej możemy wyznaczyć prędkość punktu D. Poprowadzimy prostą od punktu S do punktu D i wektor prędkości tego punktu będzie leżeć na prostopadłym kierunku.

$$V_D = \omega * DS = \omega * \frac{1}{2} BC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

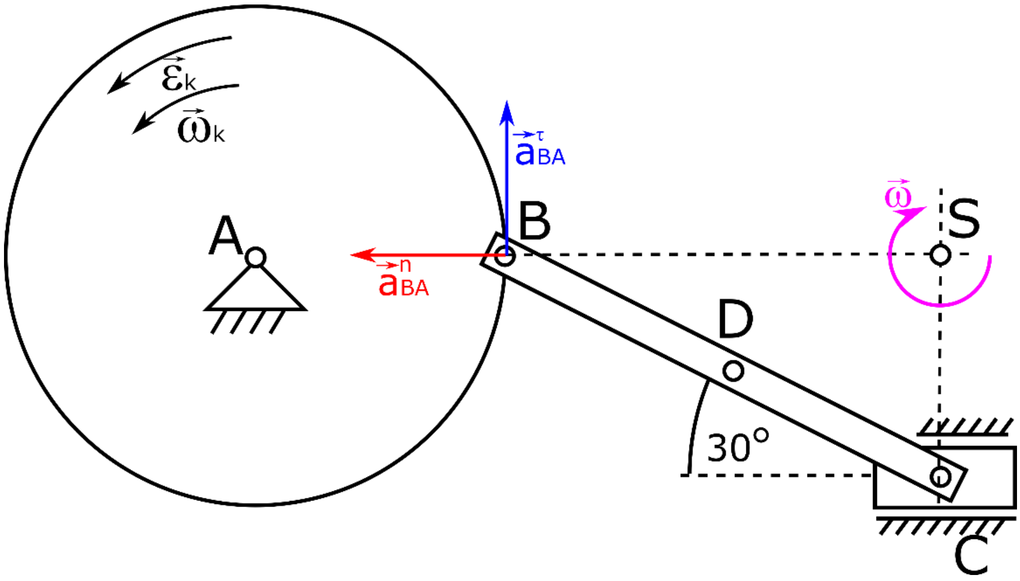


Następnie możemy przejść do określenia przyspieszeń. Zaczniemy od punktu B. Znajduje się na okręgu, którego środek jest nieruchomy, więc obliczymy przyspieszenie punktu B względem środka okręgu.

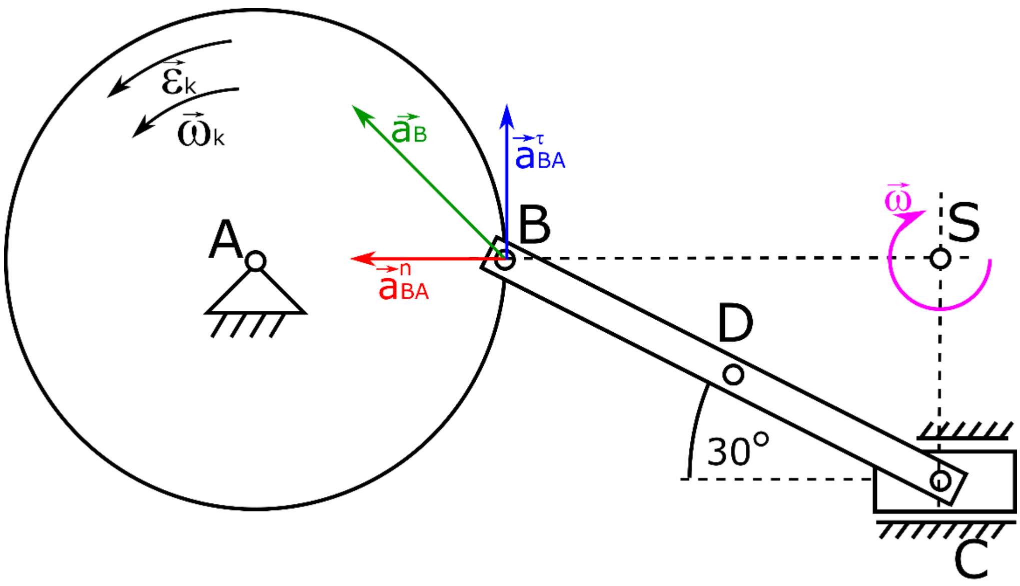
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$$

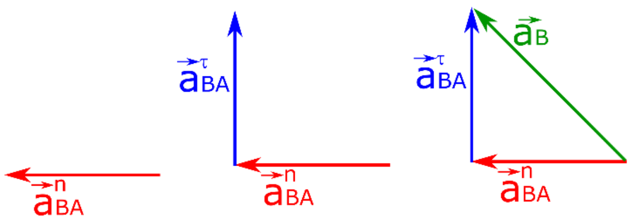
$$|\vec{a}_{BA}^n| = \omega_k^2 * AB = 2$$

$$|\vec{a}_{BA}^\tau| = \varepsilon_k * AB = 2$$



$$|\vec{a}_B| = \sqrt{{\vec{a}^n_{BA}}^2 + {\vec{a}^\tau_{BA}}^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$



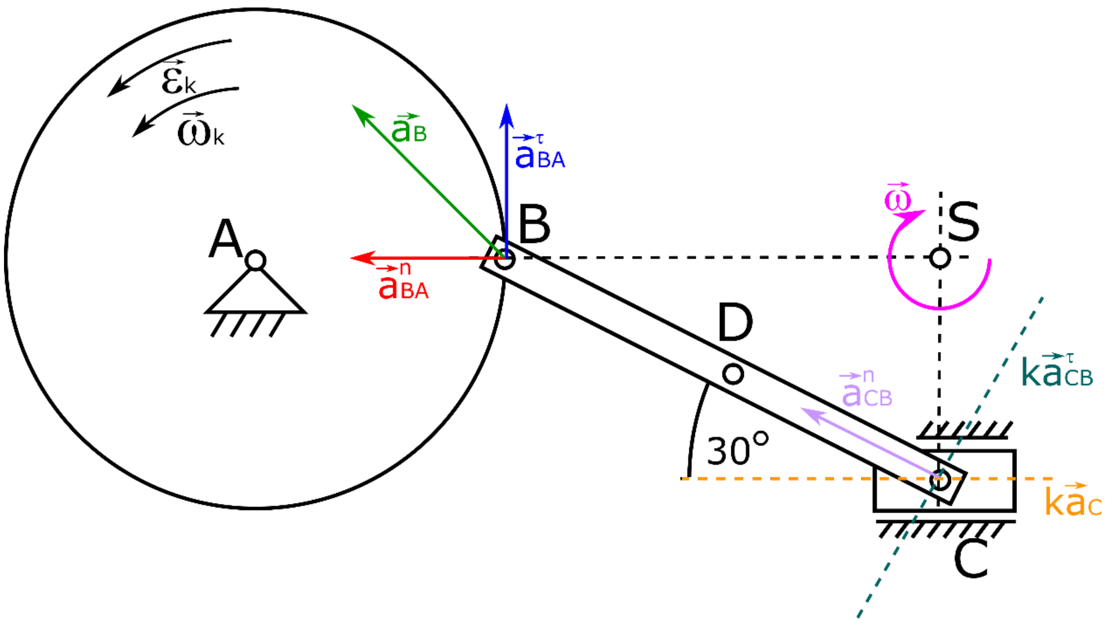


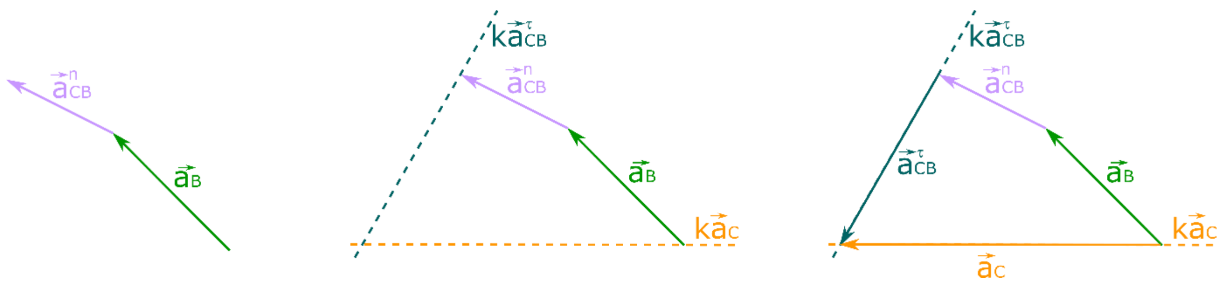
Następnie obliczamy przyspieszenie dla pozostałych punktów. Najpierw wybierz, od którego punktu C lub D zaczynamy. Widać, że podobnie jak w przypadku prędkości, również tutaj punkt C może poruszać się tylko poziomo, więc jego przyspieszenie będzie odbywać się w tym kierunku.

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^\tau$$

$$|\vec{a}_{CB}^n| = \omega^2 * BC = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 * 4 = \frac{4}{3}$$

Po wykreśleniu normalnego przyspieszenia punktu C w stosunku do punktu B i kierunku przyspieszenia stycznego punktu C w stosunku do punktu B, możemy utworzyć łańcuch przyspieszeń jak pokazano na rysunku.





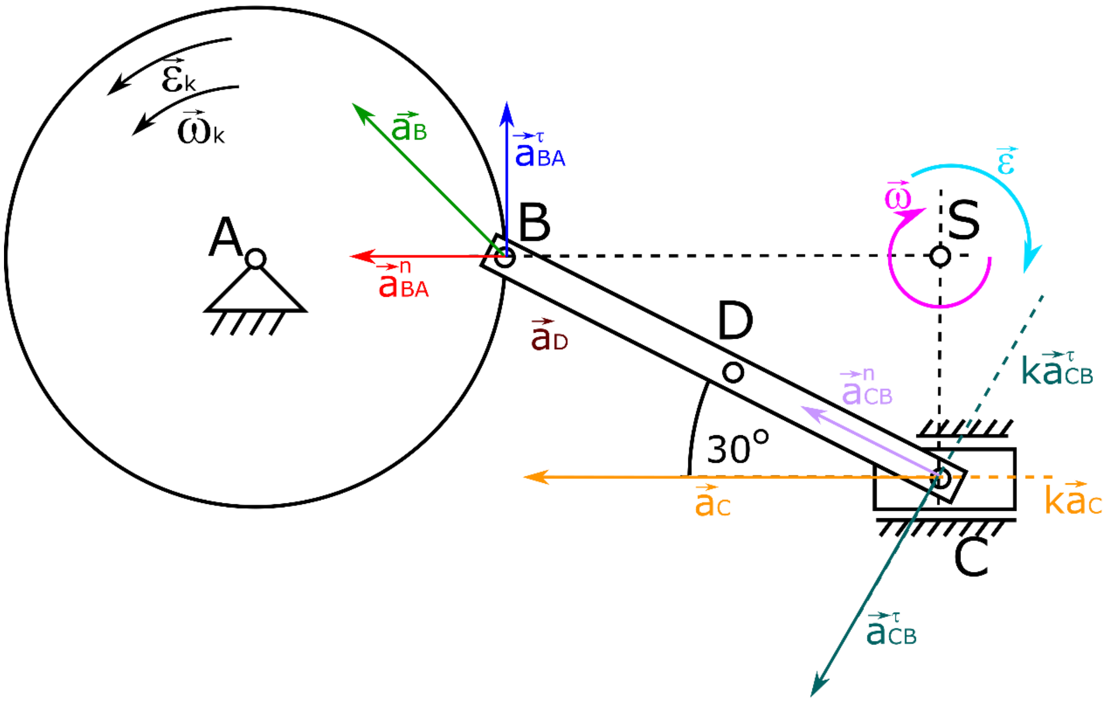
W kolejnym kroku rzutujemy przyspieszenia na osie X i Y iw ten sposób jesteśmy w stanie wyznaczyć przyspieszenie punktu C oraz przyspieszenie styczne punktu C względem B. Wyznaczając przyspieszenie styczne, możemy znaleźć wartość przyspieszenia kątowego.

$$\begin{cases} -a_C = -a_B \cos 45° - a_{CB}^n \cos 30° - a_{CB}^\tau \cos 60° \\ \quad 0 = a_B \sin 45° + a_{CB}^n \sin 30° - a_{CB}^\tau sin60° \end{cases}$$

$$a_{CB}^\tau = \frac{a_B \sin 45° + a_{CB}^n \sin 30°}{sin60°} = \frac{2 + \frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

$$a_{CB}^\tau = \varepsilon * CB \Rightarrow \varepsilon = \frac{a_{CB}^\tau}{CB} = \frac{\frac{16\sqrt{3}}{9}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

$$a_C = \frac{18 + 14\sqrt{3}}{9}$$

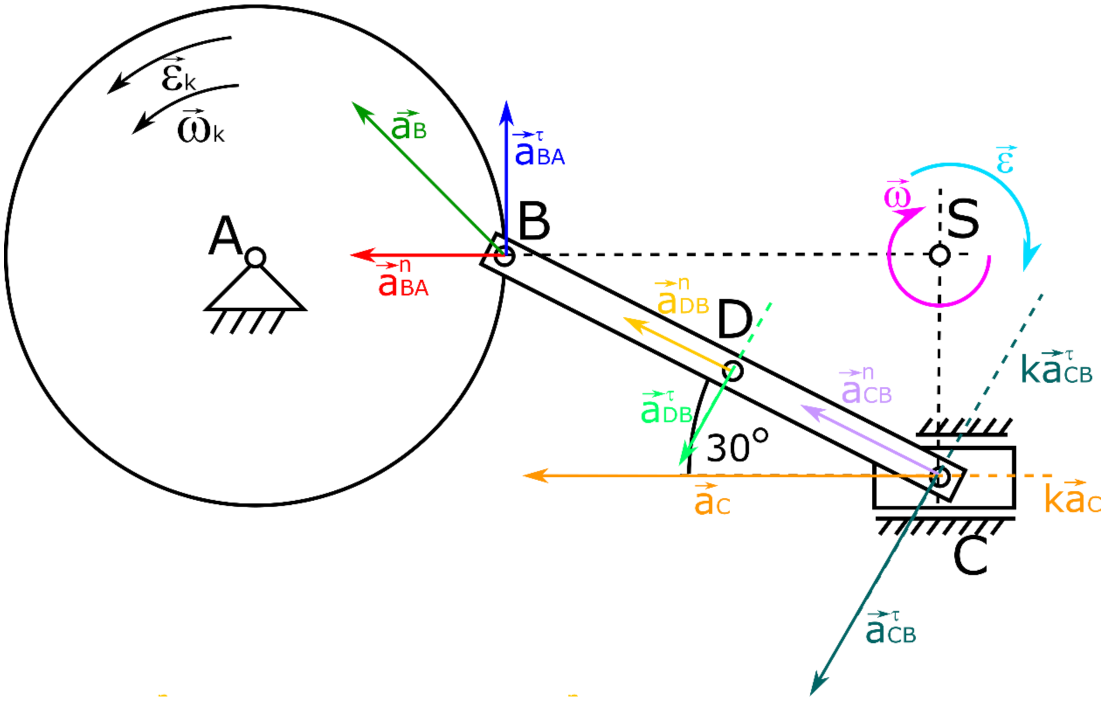


Dysponując informacją o prędkości kątowej i przyspieszeniu kątowym, możemy obliczyć przyspieszenie punktu D. Nie znamy kierunku tego przyspieszenia, ale poznamy wartości i kierunki składowych tego przyspieszenia.

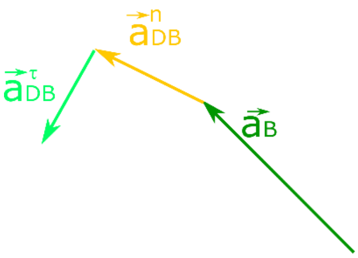
$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}^{n}_{DB} + \vec{a}^{\tau}_{DB}$$

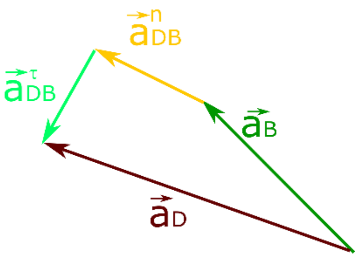
$$|\vec{a}^{n}_{DB}| = \omega^2 * DB = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 * 2 = \frac{2}{3}$$

$$|\vec{a}^{\tau}_{DB}| = \varepsilon * DB = \frac{4\sqrt{3}}{9} * 2 = \frac{8\sqrt{3}}{9}$$



Po naniesieniu tych przyspieszeń na rysunek możemy stworzyć łańcuch przyspieszeń, podobnie jak w przypadku punktu C.





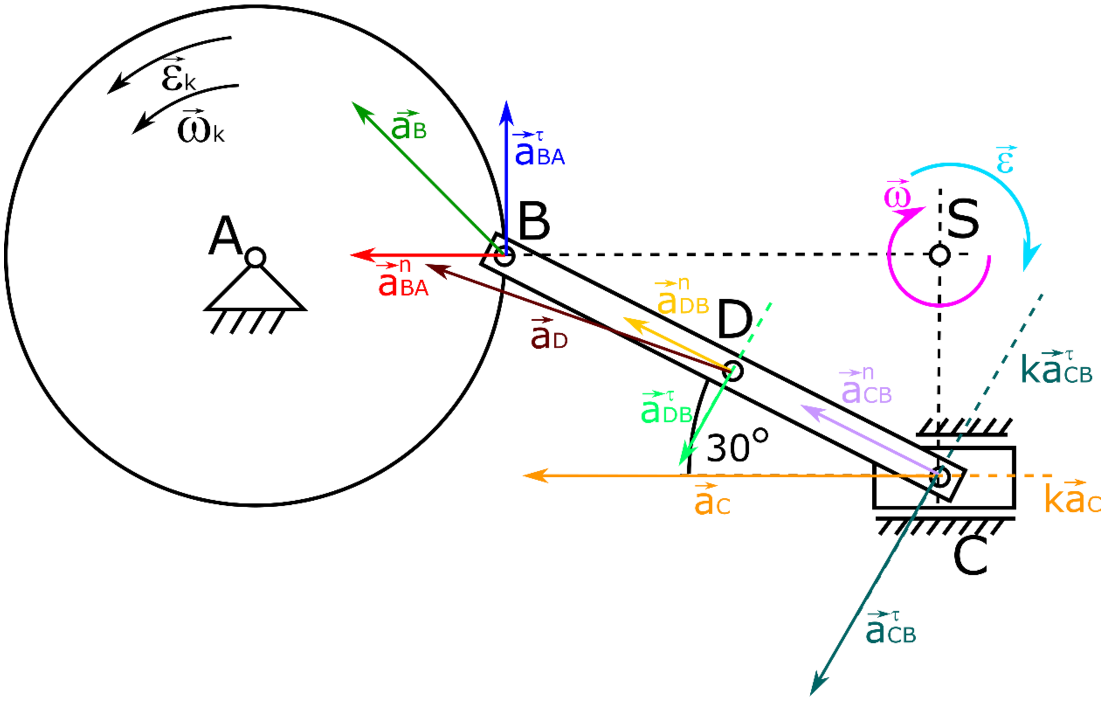
W kolejnym kroku rzutujemy przyspieszenia na osie X i Y iw ten sposób jesteśmy w stanie wyznaczyć przyspieszenie punktu D. Co prawda w pierwszej kolejności określamy wartości jego składowych na osiach X i Y, ale określenie końcowej wartości przyspieszenia D jest wtedy formalnością.

$$\begin{cases} -a_{Dx} = -a_B \cos 45° - a_{DB}^{n} \cos 30° - a_{DB}^{\tau} \cos 60° \\ a_{Dy} = a_B \sin 45° + a_{DB}^{n} \sin 30° - a_{DB}^{\tau} sin 60° \end{cases}$$

$$a_{Dx} = 2\sqrt{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3} * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{8\sqrt{3}}{9} * \frac{1}{2} = \frac{18 + 7\sqrt{2}}{9}$$

$$a_{Dy} = 2\sqrt{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3} * \frac{1}{2} - \frac{8\sqrt{3}}{9} * \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$a_D = \sqrt{{a_{Dx}}^2 + \ {a_{Dy}}^2} = 3{,}49$$



$\vec{\varepsilon}_k$
$\vec{\omega}_k$
A
B
$\vec{a}_B$
$\vec{a}^{\tau}_{BA}$
$\vec{a}^{n}_{BA}$
$\vec{a}_D$
$\vec{a}^{n}_{DB}$
D
$\vec{a}^{\tau}_{DB}$
30°
$\vec{\omega}$
$\vec{\varepsilon}$
S
$k\vec{a}^{\tau}_{CB}$
$\vec{a}^{n}_{CB}$
$\vec{a}_C$
$k\vec{a}_C$
C
$\vec{a}^{\tau}_{CB}$