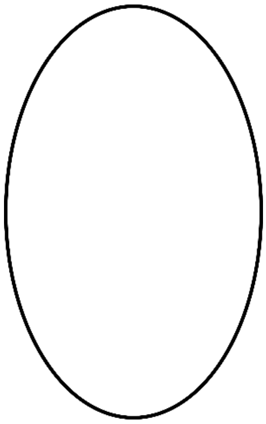
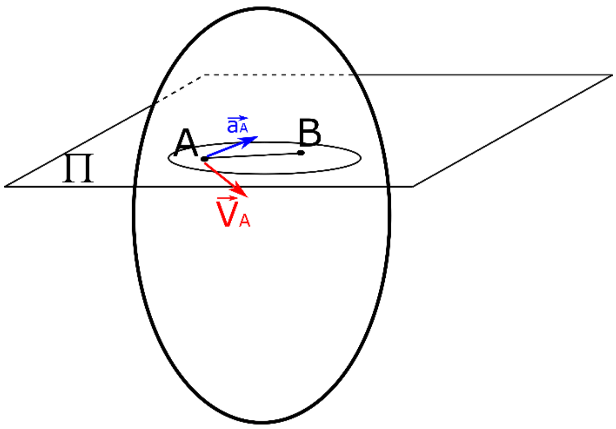
Ruch płaski bryły sztywnej

Ruch płaski to ruch, w którym wszystkie punkty ciała poruszają się w płaszczyznach równoległych do określonej płaszczyzny zwanej płaszczyzną ruchu płaskiego (kierującego).

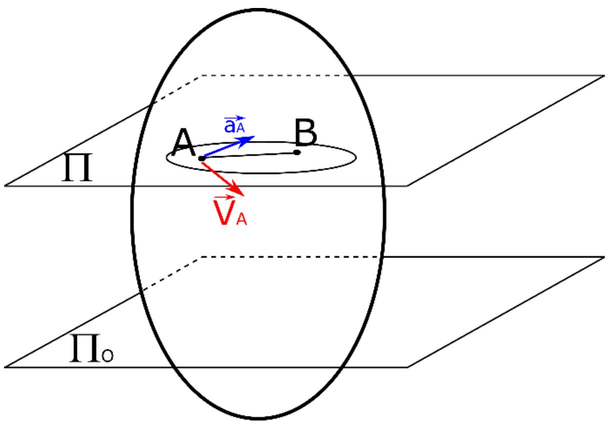
Wyobraźmy sobie ciało sztywne w przestrzeni



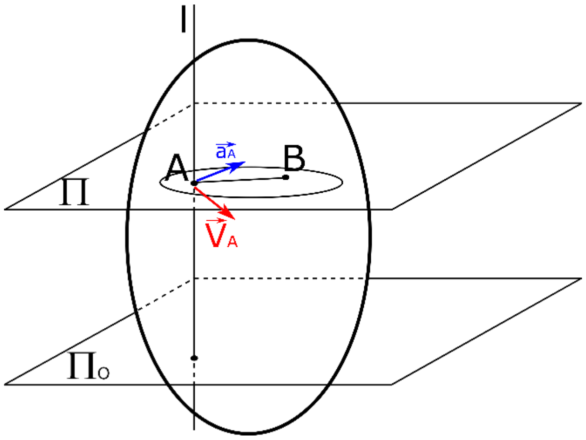
Przetnijmy nasze ciało płaszczyzną π, na której umieścimy punkty A i B. Odległość między punktami tego ciała jest stała podczas ruchu. Załóżmy, że znamy prędkość i przyspieszenie punktu A, jak pokazano na rysunku.



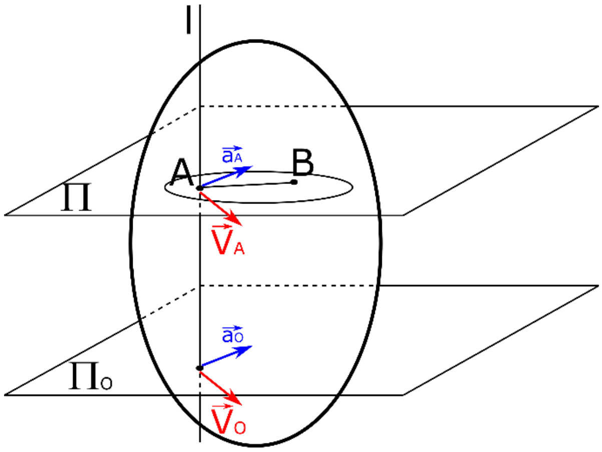
Teraz umieśćmy kolejną płaszczyznę w naszym układzie, będzie to płaszczyzna π_O, która będzie równoległa do płaszczyzny π i przejdzie przez nasze ciało w innym miejscu



Teraz, jeśli przejdziemy przez punkt A prostopadły do płaszczyzny π zobaczymy, że ten sam punkt pojawi się na płaszczyźnie π_O

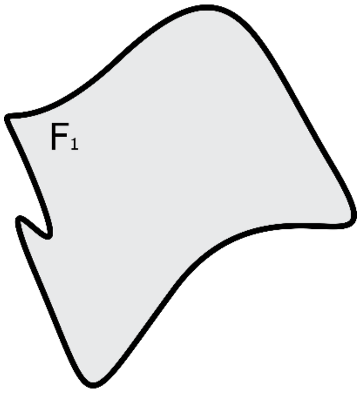


Ponieważ ciało jest sztywne, oznacza to, że punkt utworzony na płaszczyźnie π_O będzie miał taką samą prędkość i przyspieszenie jak punkt A

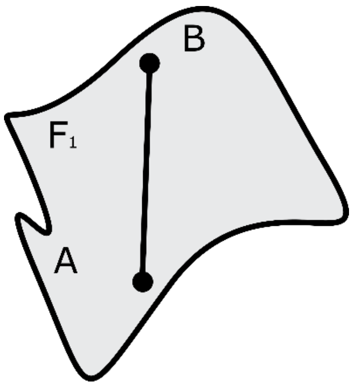


Podsumowując, można stwierdzić, że ruchy w płaszczyznach π i π_O są identyczne. Ogólnie można powiedzieć, że analiza ruchu płaskiego danego ciała sztywnego skupia się na badaniu ruchu jednej sekcji ciała. W ten sposób dla jednej płaszczyzny możemy zdefiniować ruch wszystkich innych punktów tego ciała.

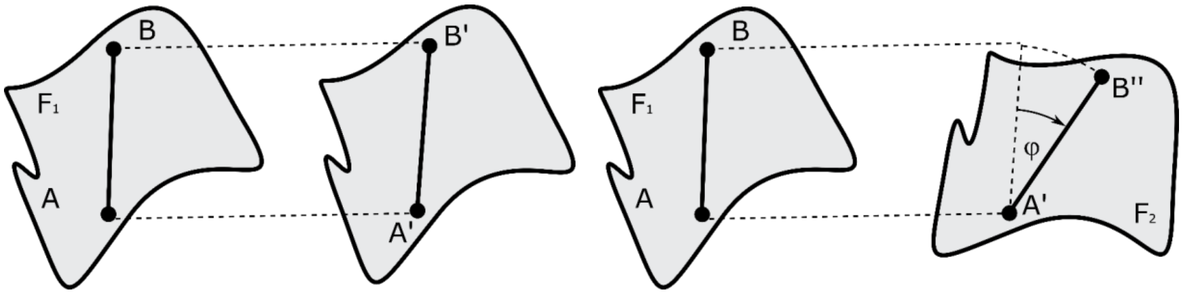
Zastanówmy się, jak będzie się odbywał ruch na płaszczyźnie. Załóżmy, że mamy płaską figurę F.



Teraz wprowadzimy na tej figurze odcinek AB, który będzie reprezentował ruch całej figury.

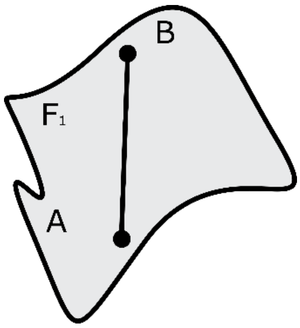


Figurę płaską można przesuwać w swojej płaszczyźnie z dowolnego położenia za pomocą jednego równoległego przemieszczenia i jednego obrotu (obrót o kąt φ).

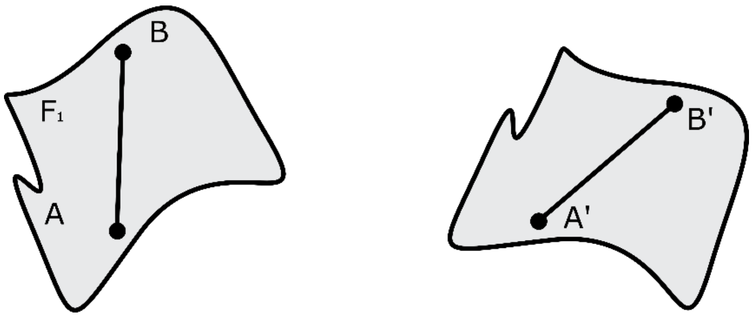


Zmianę położenia figury płaskiej w jej płaszczyźnie można również opisać twierdzeniem Euklidesa.

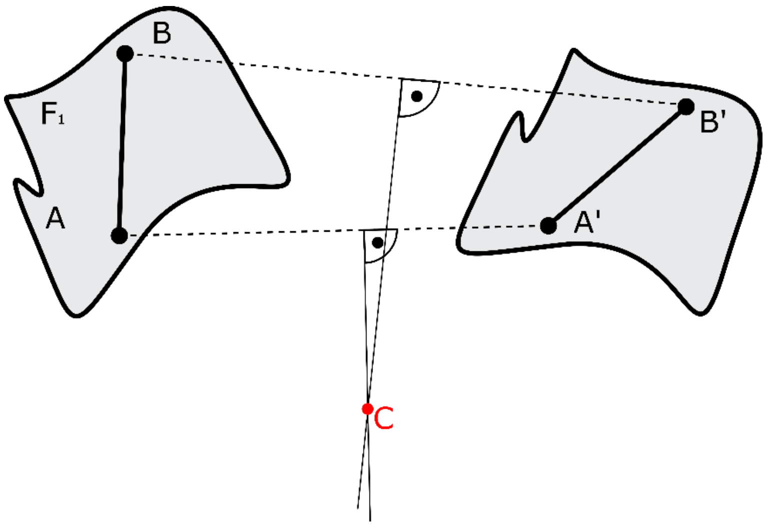
Załóżmy, że tak jak poprzednio mamy figurę płaską reprezentowaną przez odcinek AB.



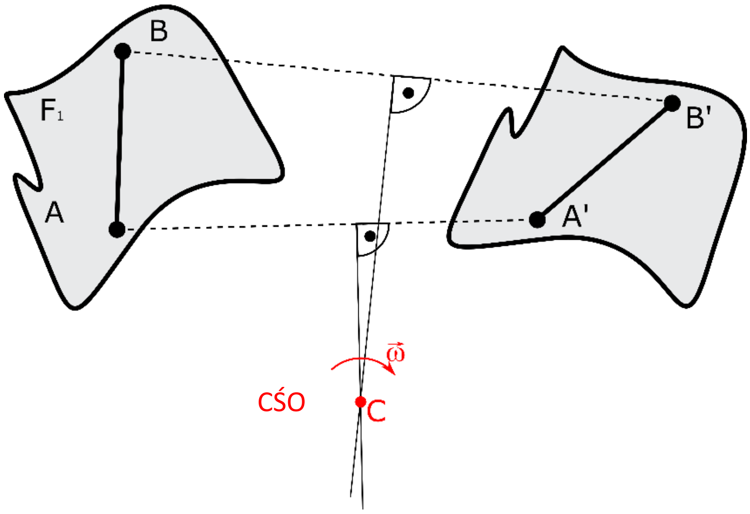
Teraz przenieśmy tę figurę z jej pierwotnej pozycji do innej pozycji.



Jeśli teraz połączymy odpowiadające sobie punkty liniami prostymi, a następnie narysujemy linie prostopadłe do narysowanych odcinków, zauważymy, że linie te przecinają się w jednym punkcie. Nazwijmy ten punkt C.



Wyznaczony punkt C będzie nazywany chwilowym środkiem obrotu (CŚO).



Punkt ten jest określony przez wspomniane wyżej twierdzenie Euklidesa, które mówi, że dowolne przemieszczenie figury płaskiej w jej płaszczyźnie można osiągnąć poprzez obrót wokół pewnego punktu zwanego ŚRODKIEM OBROTU.

Ruch wokół każdego środka obrotu jest nieskończenie krótki, dlatego te punkty nazywane są chwilowymi środkami obrotu.

Prędkości w ruchu płaskim

W ruchu płaskim opiszemy ruch ciała za pomocą trzech parametrów:

$$X_A = X_A(t); \;\; Y_A = Y_A(t) - parametry\ opisujące\ translację$$

$$\varphi = \varphi(t) - parametr\ opisujący\ rotację$$

Ruch płaski składa się z chwilowego ruchu postępowego i chwilowego ruchu obrotowego Położenie układu ruchomego w stosunku do układu stałego można określić na podstawie bieguna A i kąta obrotu φ. Ruch części ciała wzdłuż płaszczyzny kierującej zostanie w pełni zdeterminowany przez poniższe równania.

$$X_A = X_A(t)$$

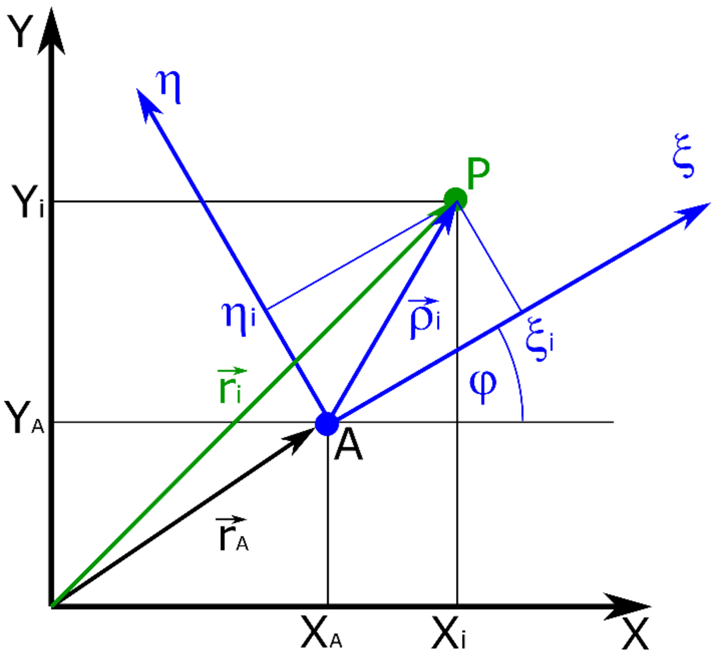
$$Y_A = Y_A(t)$$

$$\varphi = \varphi(t)$$

To są równania ruchu płaskiego

$\vec{r}_i$- położenie punktu P w układzie nieruchomym X, Y

$\vec{\rho}_i$- położenie punktu P w układzie ruchomym η, ξ



Położenie dowolnego punktu przekroju można zapisać następującym równaniem.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_A + \vec{\rho}_i$$

Przekształcając równanie, możemy uzyskać informacje o współrzędnych położenia dowolnego punktu

$$\begin{cases} x_i = x_A + \xi_i \cos\varphi - \eta_i \sin\varphi \\ y_i = Y_A + \xi_i \sin\varphi + \eta_i \cos\varphi \end{cases}$$

Różniczkując wektor przemieszczenia $\vec{r}_i$ w czasie otrzymujemy

$$\frac{\overrightarrow{dr_i}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dr_A}}{dt} + \frac{\overrightarrow{d\rho_i}}{dt}$$

gdzie

$\frac{\overrightarrow{dr_i}}{dt} = \vec{V}_i$- prędkość dowolnego punktu przekroju,

$\frac{\overrightarrow{dr_A}}{dt} = \vec{V}_A$ - prędkość bieguna A (początek ruchomego układu współrzędnych),

Podczas ruchu wektor $\vec{\rho}_i$ zmienia tylko kierunek, a jego długość pozostaje stała. Jego pochodna reprezentuje zatem obrót wokół bieguna A.

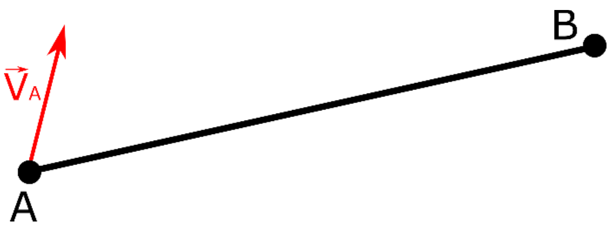
$$\frac{\overrightarrow{d\rho_i}}{dt} = \dot{\vec{\rho}}_i = \overrightarrow{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

Ostatecznie prędkość dowolnego punktu w ruchu płaskim można zapisać w następujący sposób.

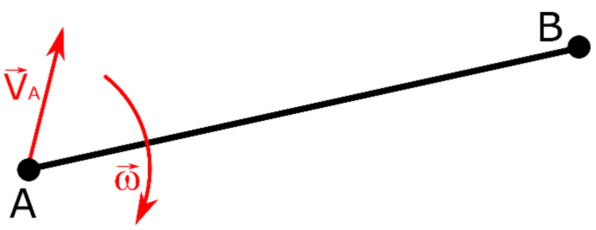
$$\vec{V}_i = \vec{V}_A + \overrightarrow{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

Jak widać, prędkość ta jest sumą ruchu postępowego i obrotowego.

Załóżmy, że mamy sztywne ciało, jak pokazano na rysunku. Znamy prędkość w punkcie A i chcemy znaleźć prędkość w punkcie B.

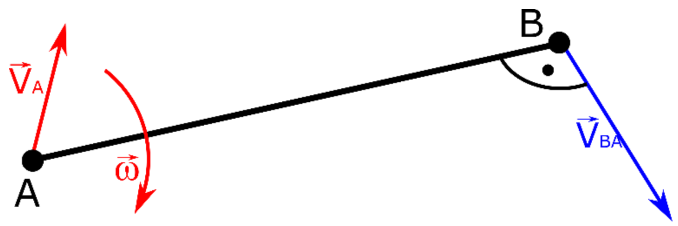


Ponadto znamy prędkość kątową $\vec{\omega}$ przy której ciało obraca się wokół punktu A.



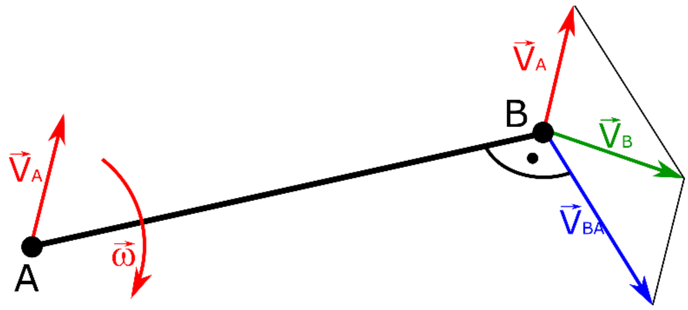
$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \overrightarrow{\omega} \times \overline{AB}$$

Aby znaleźć prędkość punktu B, zgodnie z powyższym równaniem, musimy znać prędkość punktu na tym ciele (w naszym przypadku A) i musimy znaleźć składową z obrotu naszego punktu B względem biegun, dla którego znamy prędkość, czyli punkt A. Czyli prędkość $\vec{V}_{BA}$.



Tę metodę wyznaczania prędkości w ruchu płaskim będziemy nazywać metodą superpozycji.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$



zaczynając od równania

$$\vec{V}_i = \vec{V}_A + \overrightarrow{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

$$\vec{V}_i = \vec{V}_A + \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ (x_i - x_A) & (y_i - y_A) & (z_i - z_A) \end{vmatrix} = \vec{V}_A + \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ (x_i - x_A) & (y_i - y_A) & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \vec{V}_A + \vec{\omega}_j(x_i - x_A) + \vec{\omega}_i(y_i - y_A)$$

$$\vec{V}_i = V_{Ax}\hat{\imath} + V_{Ay}\hat{\jmath} + \hat{\imath}\big(-\omega(y_i - y_A)\big) + \hat{\jmath}\big(\omega(x_i - x_A)\big)$$

$$\begin{cases} V_{ix} = \dot{x}_A - \omega(y_i - y_A) \\ V_{iy} = \dot{y}_A - \omega(y_i - y_A) \end{cases}$$

powyższe równania są składowymi prędkości w kierunkach x i y układu nieruchomego

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie składowych prędkości dla osi układu ruchomego η, ξ

$$\omega_\xi = 0;\ \omega_\xi = 0;\ \omega_\zeta = \omega$$

$$\rho_i = \xi_i\vec{\xi}_0 + \eta_i\vec{\eta}_0$$

$$\vec{V}_i = \vec{V}_A + \begin{vmatrix} \vec{\xi}_0 & \vec{\eta}_0 & \vec{\zeta}_0 \\ 0 & 0 & \omega \\ \xi_i & \eta_i & 0 \end{vmatrix} = V_{A\xi}\vec{\xi}_0 + V_{A\eta}\vec{\eta}_0 + \vec{\eta}_0\omega\xi_i - \vec{\xi}_0\omega\eta_i$$

$$\begin{cases} V_{i\xi} = V_{A\xi} - \ \omega\eta_i \\ V_{i\eta} = V_{A\eta} + \ \omega\xi_i \end{cases}$$

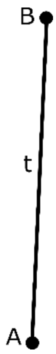
$$\begin{cases} V_{i\xi} = \dot{x}_A \cos\varphi + \dot{y}_A \sin\varphi - \omega\eta_i \\ V_{i\eta} = -\dot{x}_A \sin\varphi + \dot{y}_A \cos\varphi + \omega\xi_i \end{cases}$$

Powyższe równania są składowymi prędkości wzdłuż osi układu ruchomego

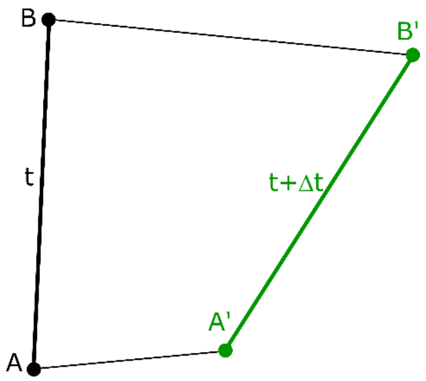
$$V_i = \sqrt{{V_{i\xi}}^2 + {V_{i\eta}}^2} = \sqrt{{V_{ix}}^2 + {V_{iy}}^2}$$

Metoda chwilowego środka prędkości

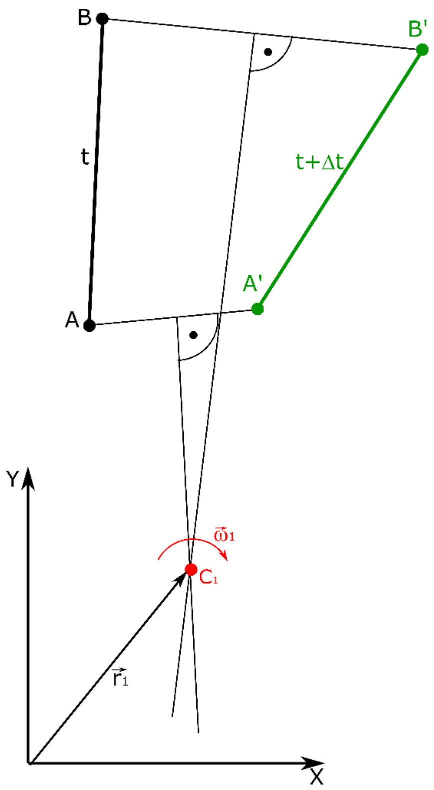
Drugą metodą, obok metody superpozycji, pozwalającą na wyznaczenie prędkości punktów w ruchu płaskim, jest metoda chwilowego środka obrotu.
W metodzie chwilowego środka obrotu zakładamy, że ruch wokół tego punktu jest nieskończenie krótki, z pewną chwilową prędkością kątową.
Załóżmy, że tak jak poprzednio mamy odcinek AB.



Teraz przemieśćmy figurę z jej pierwotnej pozycji do innej pozycji.

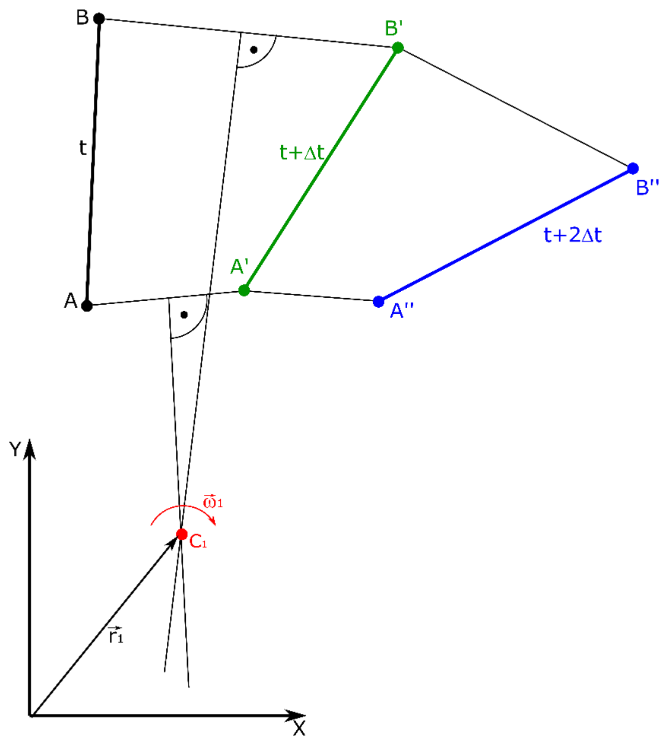


Jeśli teraz połączymy odpowiednie punkty liniami prostymi, a następnie narysujemy linie prostopadłe do poprzednich segmentów, zauważymy, że linie te przecinają się w jednym punkcie. Nazwijmy ten punkt C_1.

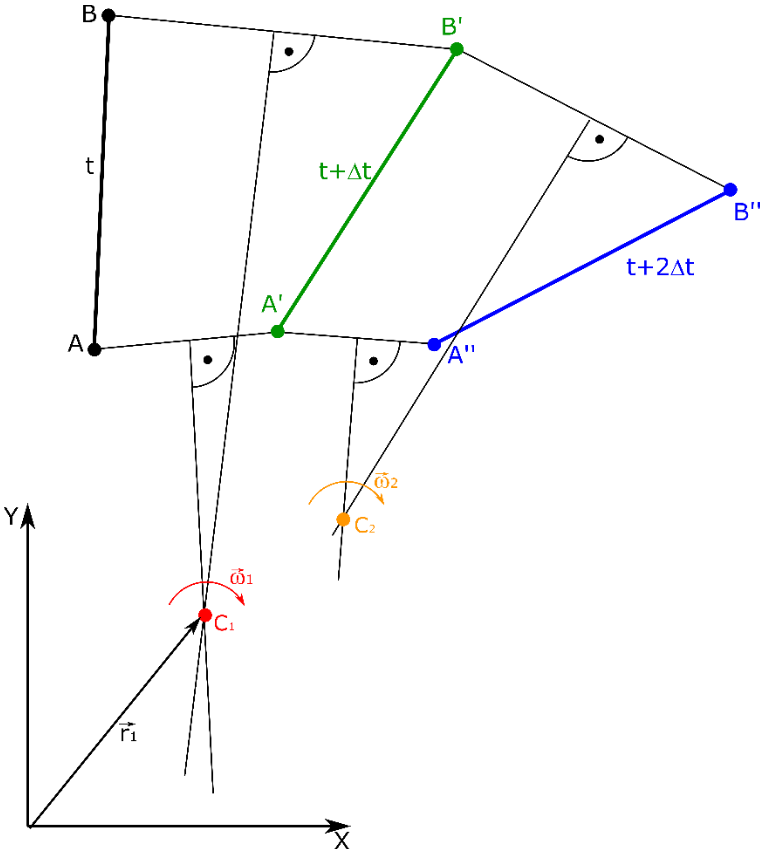


Wyznaczony punkt C_1 będzie nazywany chwilowym środkiem obrotu (CŚO)

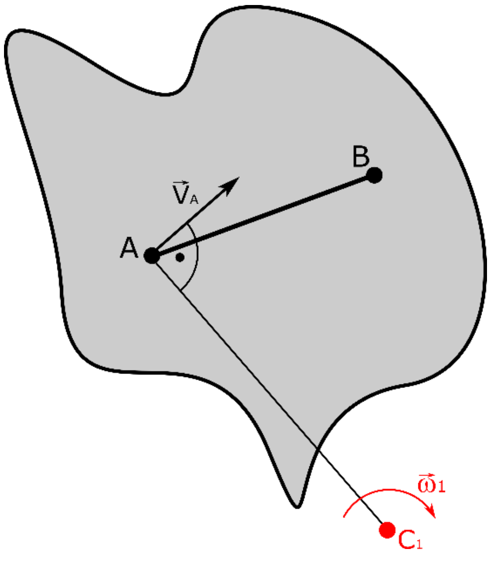
Przemieśćmy nasz obiekt jeszcze dalej



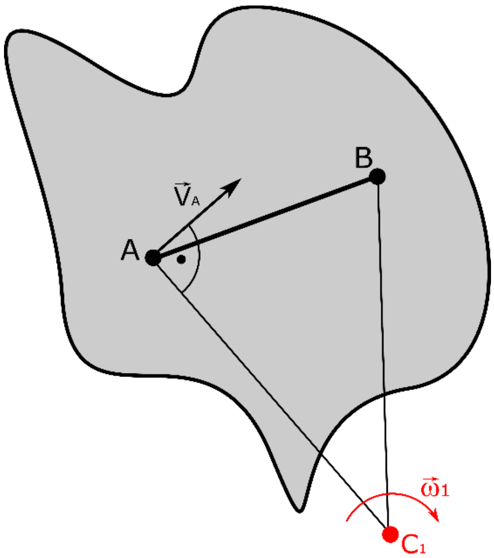
Jeśli teraz ponownie połączymy odpowiednie punkty liniami prostymi, a następnie narysujemy linie prostopadle, zauważymy, że linie przecinają się ponownie w pewnym punkcie, który znajduje się w innym miejscu niż poprzedni. Nazwijmy ten punkt C_2.



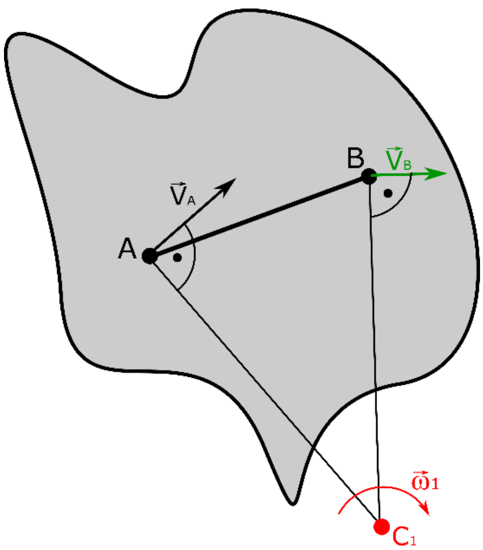
Można łatwo zauważyć, że wraz z ruchem naszego ciała zmienia się również położenie chwilowego środka obrotu. Dlatego ten punkt nazywamy chwilowym, ponieważ jest on prawdziwy tylko w danej chwili czasu (położeniu mechanizmu).
Możemy też odwrócić sytuację. Załóżmy, że znamy położenie chwilowego środka obrotu.



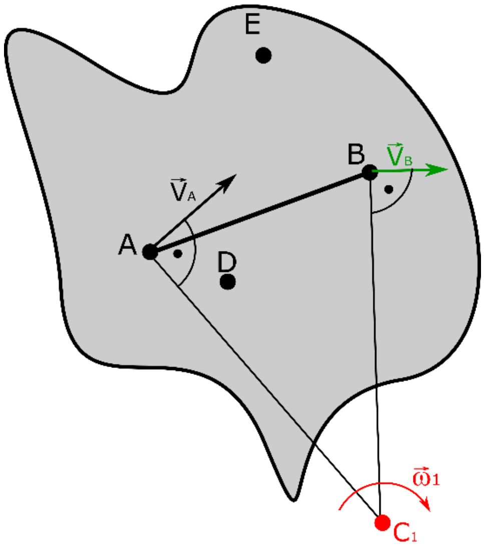
Znając lokalizację tego punktu, możemy łatwo wyznaczyć prędkości innych interesujących nas punktów. W tym celu należy poprowadzić linię prostą od chwilowego środka obrotu do interesującego punktu.

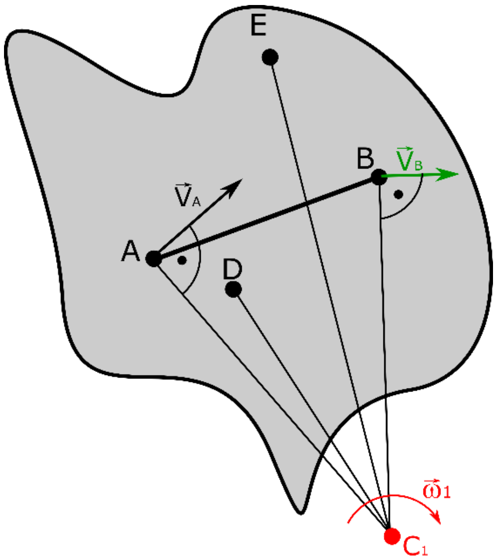


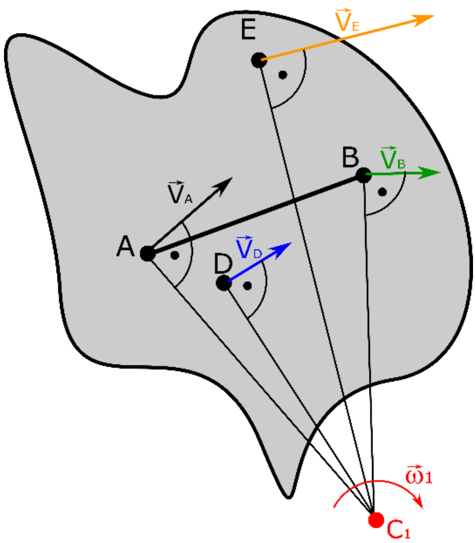
Następnie, w kierunku prostopadłym do wcześniej narysowanego odcinka, znajdujemy interesującą nas prędkość. Zwrot prędkości będzie zgodny z kierunkiem obrotu prędkości kątowej.



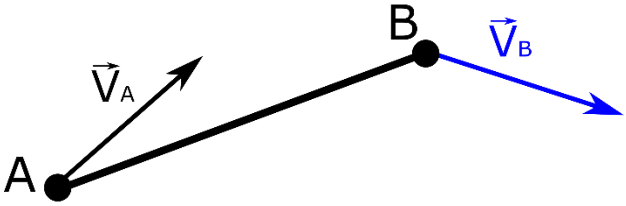
To samo możemy zrobić dla innych interesujących nas punktów, które należą do tego samego ciała.



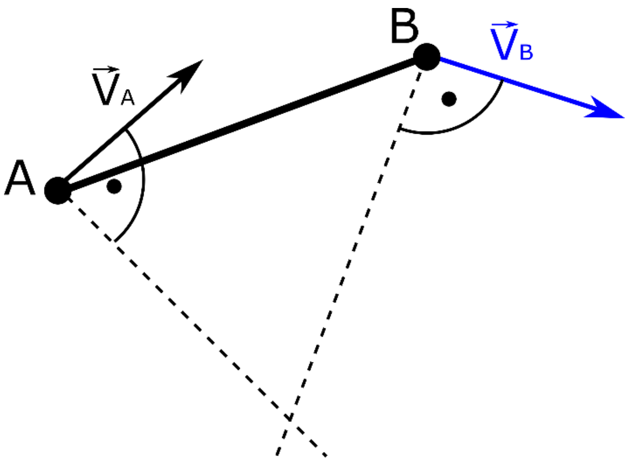




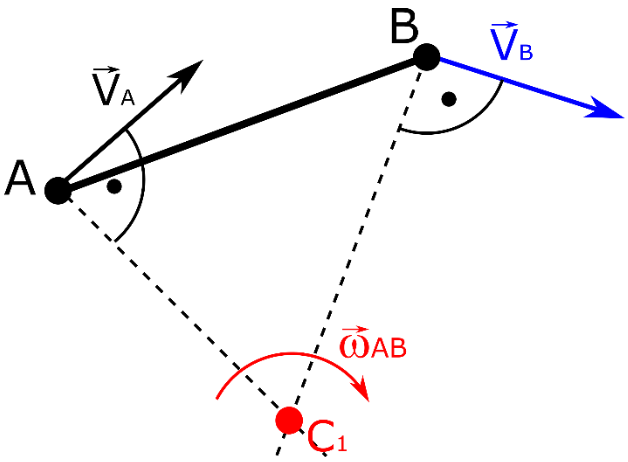
Sposoby poszukiwania chwilowego punktu obrotu, różne przypadki.
Gdy znane są dwa różne kierunki prędkości.



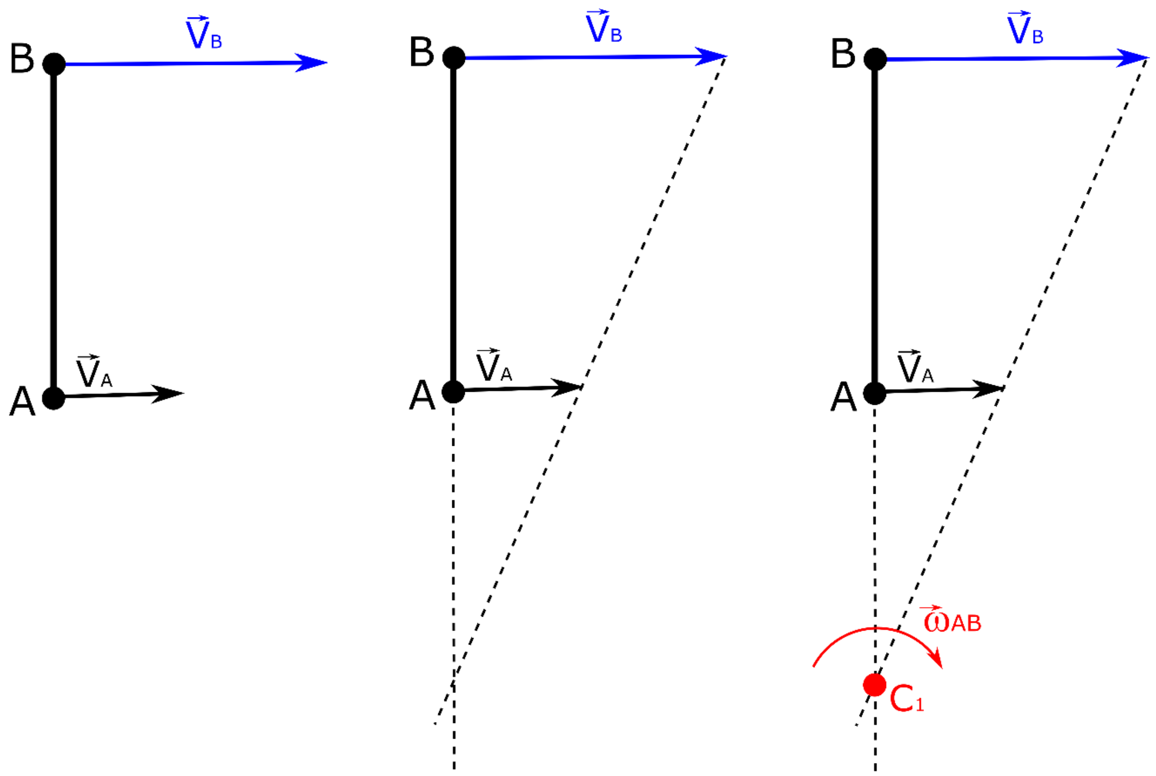
Rysujemy linie prostopadłe do kierunków prędkości



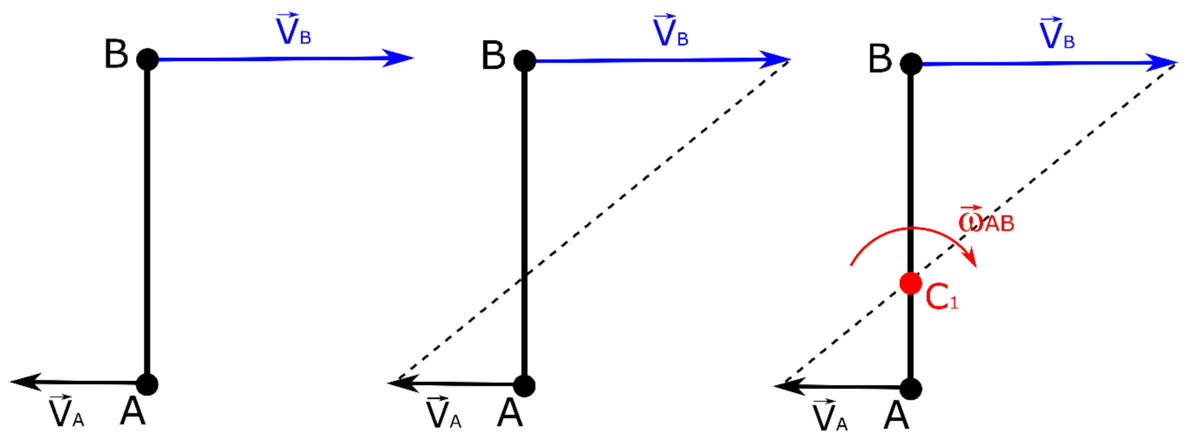
Chwilowy środek obrotu będzie na przecięciu narysowanych linii



Kierunki prędkości równoległe do siebie. Prędkości mają ten sam zwrot, ale inną wartość.
Rysujemy dwie linie łączące początki wektorów prędkości i ich końce.
Chwilowy środek obrotu będzie znajdować się na przecięciu tych dwóch linii.



Kierunki prędkości równoległe do siebie. Prędkości mają przeciwny zwrot, mogą mieć taką samą lub inną wartość. Rysujemy dwie linie łączące początki wektorów prędkości i ich końce.
Chwilowy środek obrotu będzie znajdować się na przecięciu tych dwóch linii.



Kierunki prędkości równoległe do siebie. Prędkości mają ten sam zwrot i tą samą wartość. Rysujemy dwie linie łączące początki wektorów prędkości i ich końce. Jak widać, narysowane linie nie będą się przecinać. Oznacza to, że chwilowy środek obrotu znajduje się w nieskończoności, a prędkość kątowa wynosi zero. Ciało wykonuje tylko ruch translacyjny.