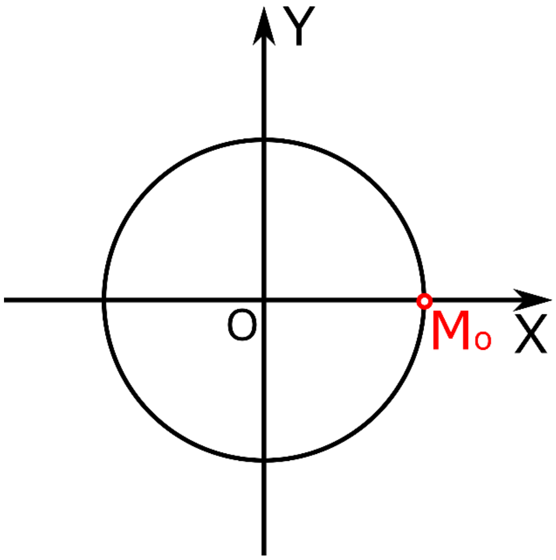
Ruch punktu po okręgu

Poprzedni temat dotyczył ruchu punktu po torze krzywoliniowym. Jednakże obecnym tematem jest szczególny rodzaj ruchu krzywoliniowego, w którym promień krzywizny ρ jest stały w trakcie całego ruchu i jest równy promieniowi r koła.

Załóżmy, że punkt M porusza się po okręgu o promieniu r. Początek ruchu znajduje się po dodatniej stronie osi X (M_o) i zmienia się wraz z kątem ϕ. Zatem punkt M przemieszcza się po łuku M_oM.



Możemy obliczyć długość łuku zgodnie z równaniem.

$$s = r * \phi$$

Wiemy z poprzedniego tematu, że prędkość jest równa

$$V = \frac{ds}{dt}$$

Ponieważ promień jest stały w czasie, jedyną wartością, która zależy od czasu jest kąt. Dlatego możemy pisać.

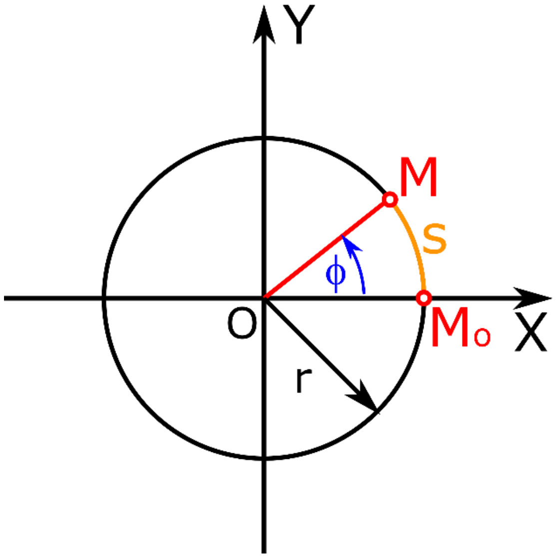
$$V = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\phi}{dt}$$

Pochodna kąta w czasie jest równa prędkości kątowej.

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega$$

ostatecznie otrzymujemy

$$V = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\phi}{dt} = r * \omega$$



Wiemy już, jak obliczyć prędkość w ruchu po okręgu. W kolejnym kroku dowiemy się, jak wyznaczyć przyspieszenie punktu.

Z poprzedniego tematu wiemy, że w przypadku ruchu krzywoliniowego wyróżniamy dwie składowe przyspieszenia, tj. przyspieszenie styczne i przyspieszenie normalne.

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Ogólnie możemy zapisać te przyspieszenia jako

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}$$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}$$

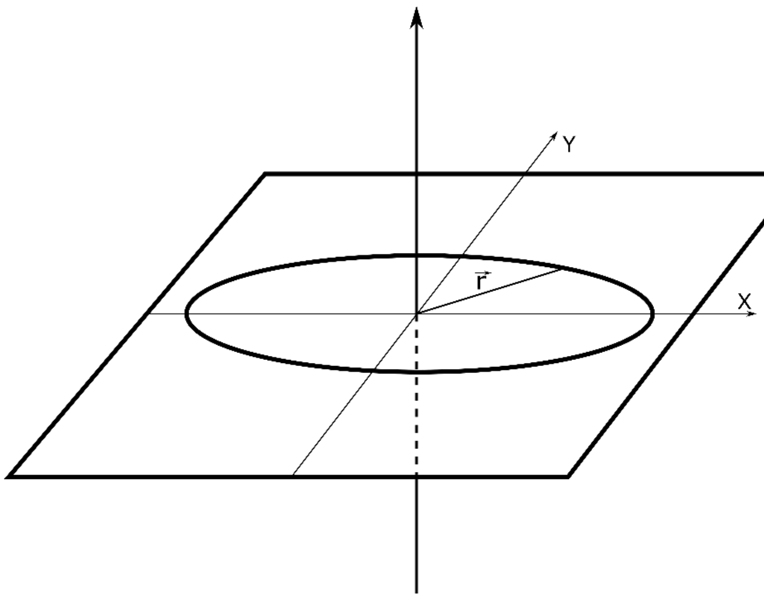
Ponieważ promień krzywizny jest stały, przekształcamy powyższe równania do następującej postaci.

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\frac{d^2\phi}{dt^2} = r * \varepsilon$$

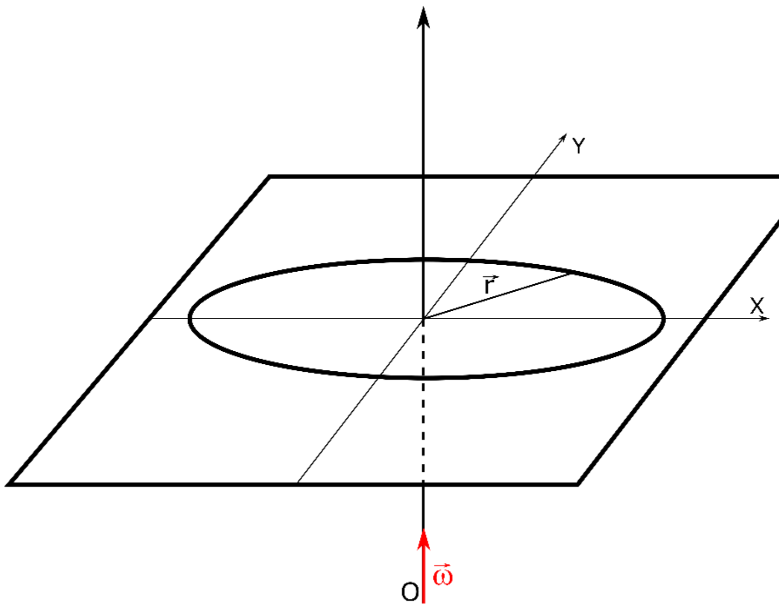
$$a_n = \frac{V^2}{r} = \frac{(r*\omega)^2}{r} = \frac{r^2\omega^2}{r} = r * \omega^2$$

W dalszej części dyskusji zdefiniujmy, czym jest dla nas ω.

ω jest wielkością wektorową. Załóżmy, że mamy punkt, który porusza się po określonej płaszczyźnie ruchem okrężnym. Promień okręgu to r.



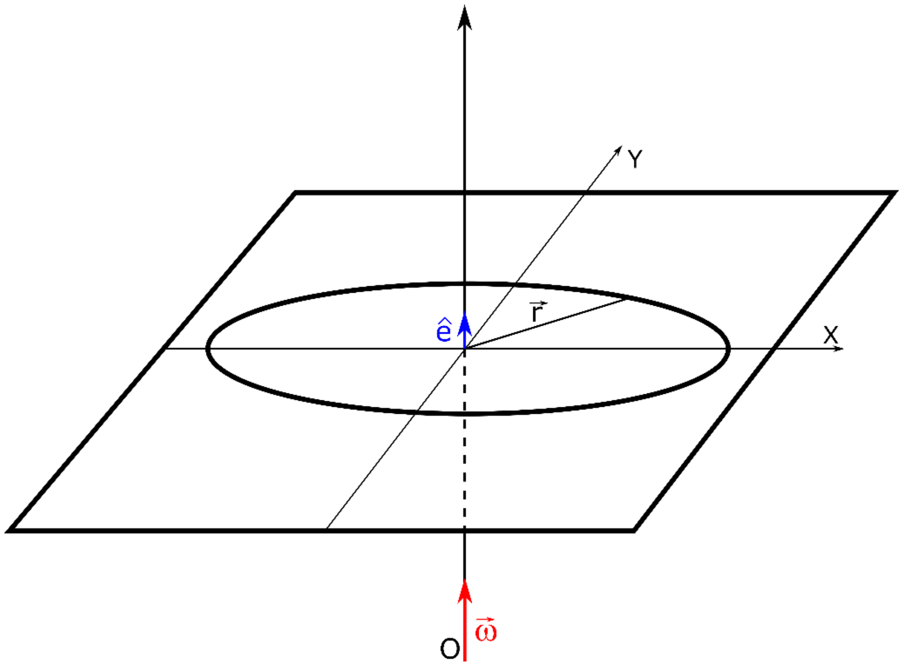
Wektor prędkości kątowej będzie leżeć na osi prostopadłej do płaszczyzny, na której znajduje się tor ruchu punktu. Oś ta jest jednocześnie osią obrotu naszego punktu. Ponadto możemy swobodnie przesuwać ten wektor wzdłuż linii działania.



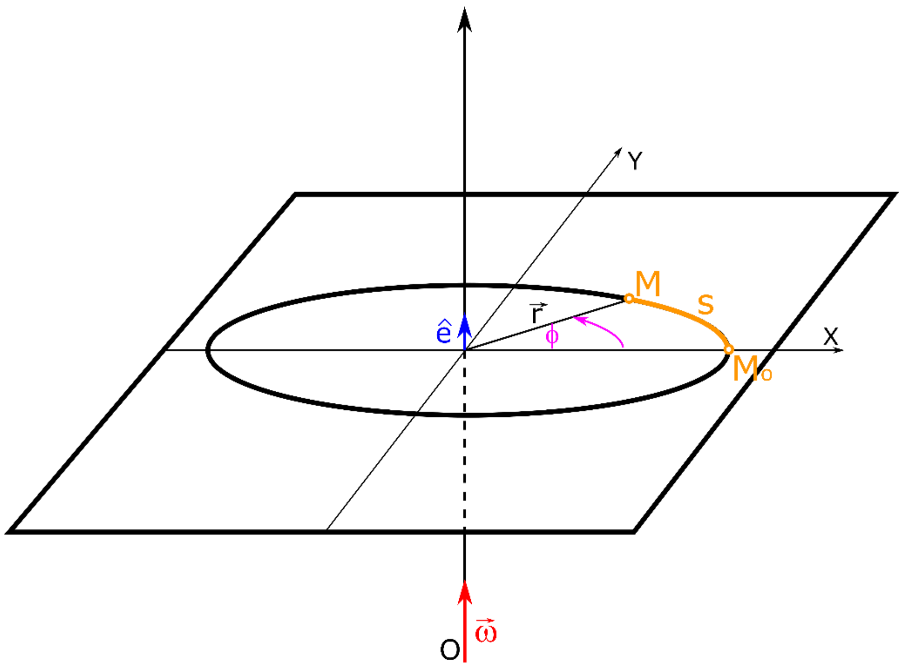
Wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ możemy zapisać następująco

$$\vec{\omega} = \omega\hat{e} = \frac{d\phi}{dt}\hat{e}$$

gdzie $\hat{e}$ będzie dla nas wersorem wzdłuż osi Z.



Załóżmy, że punkt M porusza się po okręgu o promieniu r. Początek ruchu w punkcie Mo i zmienia się wraz z kątem ϕ. Zatem punkt M porusza się po łuku s (MoM).



Skoro punkt się porusza, oznacza to, że ma pewną prędkość liniową $\vec{V}$. Wiemy, że prędkość liniowa jest wielkością wektorową i jak wspomniano wcześniej, zależy od promienia $\vec{R}$ i prędkości kątowej $\vec{\omega}$. Dlatego z definicji możemy napisać że

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

Aby uzyskać wartość wektora prędkości, musimy skorzystać z następującego wzoru.

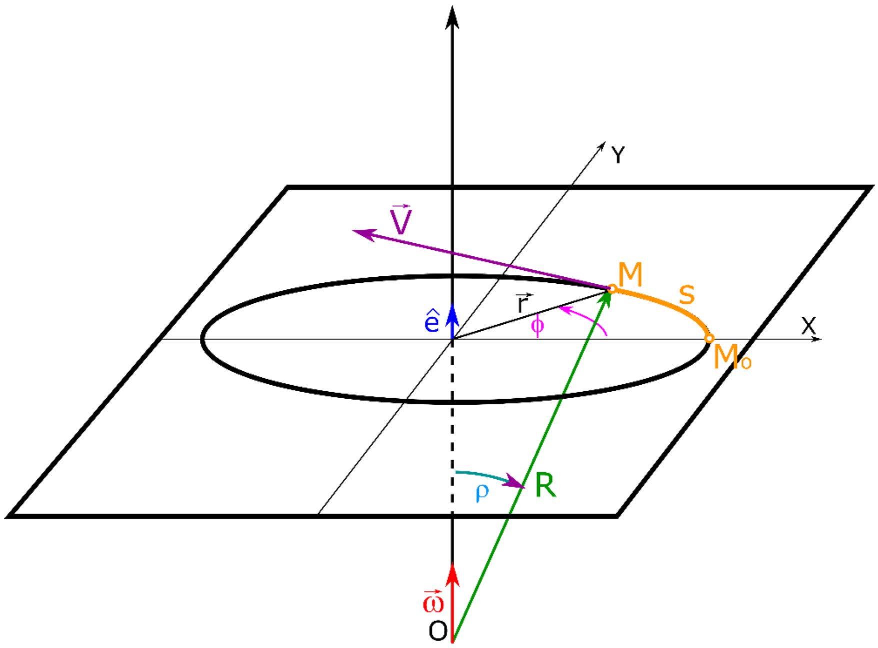
$$|\vec{V}| = \omega * R * \sin\rho$$

Widzimy wyraźnie, że w ten sposób otrzymujemy wyrażenie w następującej formie,

$$|\vec{V}| = \omega * R * \sin\rho = \omega * r$$

gdzie wektory są do siebie prostopadłe.

$$\vec{V} \perp \vec{\omega} \perp \vec{r}$$



Mając powyższą wiedzę o prędkości w ruchu po okręgu, możemy przejść do przyspieszenia. Wiemy, że przyspieszenie jest to pochodna prędkości. Możemy napisać następujące równanie

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

w związku z tym, że

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

zapiszmy powyższe równania w następujący sposób

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{R}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt}$$

Widać wyraźnie, że otrzymaliśmy pochodną prędkości kątowej w czasie. Z poprzednich rozważań wiemy, że pochodna prędkości w czasie jest równa przyspieszeniu. W tym przypadku mówimy o prędkości kątowej, dlatego wynikające z tego przyspieszenie będzie przyspieszeniem kątowym.

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$$

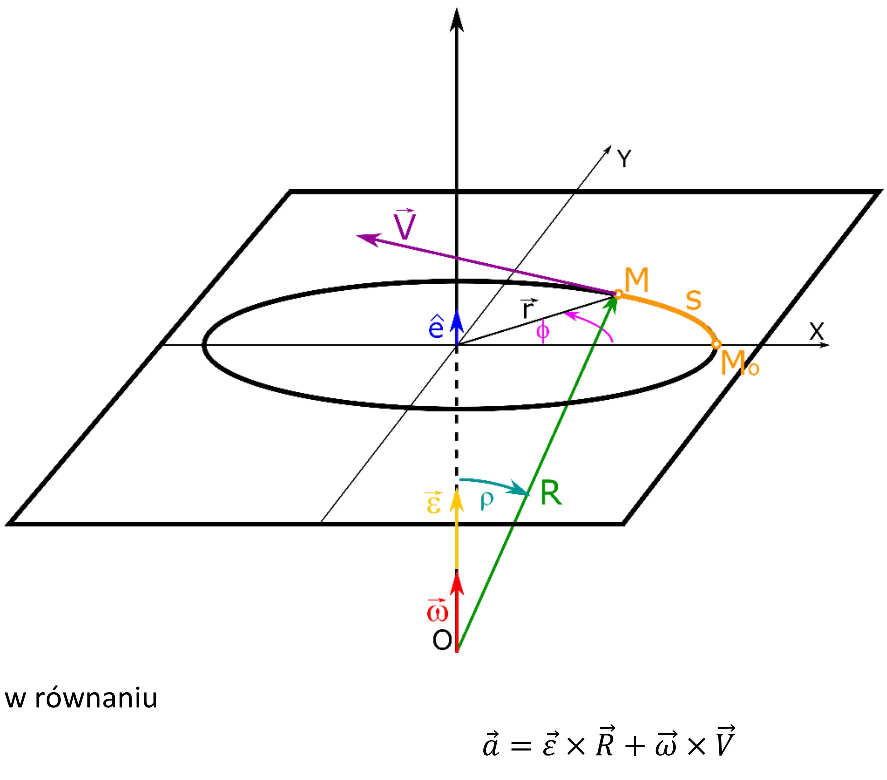
wektora długości w czasie, która w rzeczywistości jest pochodną zmiany drogi w czasie. Wiemy, że ta pochodna będzie równa prędkości liniowej.

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$$

Biorąc powyższe pod uwagę, możemy powiedzieć, że wektor przyspieszenia liniowego w ruchu kołowym ma następującą postać.

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{V}$$

Ponieważ wektor prędkości kątowej$\vec{\omega}$ znajduje się na kierunku osi Z a wektor przyspieszenia kątowego $\vec{\varepsilon}$ jest pochodną wektora prędkości kątowej w czasie, wektor przyspieszenia kątowego również musi leżeć na kierunku prędkości kątowej.



w równaniu

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \vec{V}$$

pierwszy człon odpowiada przyspieszeniu stycznym

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{R}$$

$$|\vec{a}_\tau| = \left|\vec{\varepsilon} \times \vec{R}\right| = \varepsilon * R * \sin\rho = \varepsilon * r$$

podczas gdy drugi człon odpowiada przyspieszeniu normalnemu

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{V}$$

$$|\vec{a}_n| = |\vec{\omega} \times \vec{V}| = \omega * V * \sin\frac{\pi}{2} = \omega^2 * r = \frac{V^2}{r}$$

Wektor przyspieszenia normalnego $\vec{a}_n$ jest prostopadły do wektorów $\vec{\omega}$ i $\vec{V}$, a jego zwrot jest zawsze w kierunku osi obrotu.

Przyspieszenie kątowe może być

$$\vec{\varepsilon} > 0;\ \vec{\varepsilon} < 0$$

lub

$$\vec{\varepsilon} = 0\ wówczas\ \vec{V} = const$$

w trakcie rozruchu

$$\vec{V} = 0\ and\ \vec{\varepsilon} \neq 0$$

Przykład 1.

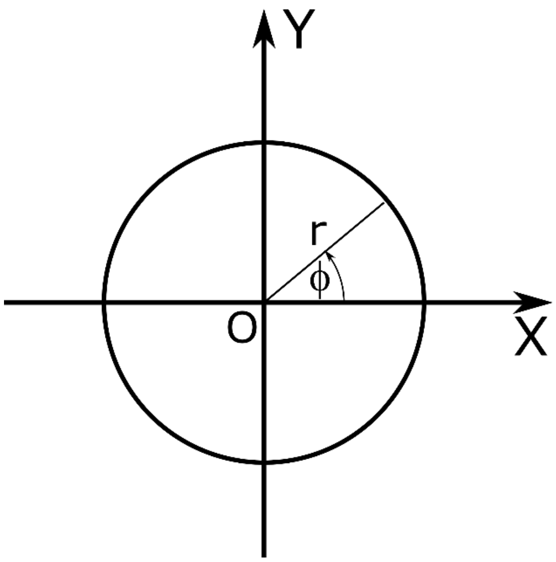
Punkt porusza się po okręgu o promieniu r = 1,5m zgodnie z równaniem

$$s = 0{,}5 + 0{,}06t + 0{,}1t^3$$

Znajdź prędkość kątową i liniową oraz przyspieszenie punktu w czasie t_1 = 5s.

Najpierw, jak zawsze, zaczynamy od rysunku. Narysujmy więc ścieżkę punktu w układzie współrzędnych. Środek koła będzie w środku układu współrzędnych.

Załóżmy, że punkt M zaczyna swój ruch na osi X i porusza się zgodnie z zaznaczoną zmianą kąta.



Na początku dobrze będzie dowiedzieć się, gdzie w danym momencie znajduje się punkt.

Podstawiając t_1 do podanego równania, możemy określić, jaką drogę przebyliśmy od początku ruchu.

$$s(t_1) = 0{,}5 + 0{,}06 * 5 + 0{,}1 * 5^3 = 13{,}3m$$

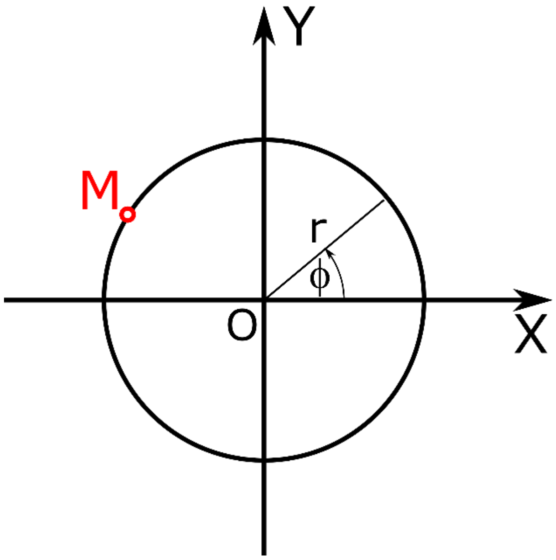
Gdy znamy wartość, o jaką przesunie się punkt i wartość promienia, możemy określić, o ile zmienił się kąt dla zadanego czasu.

$$\phi = \frac{s}{r} = \frac{13{,}3}{1{,}5} = 8{,}86\,rad$$

Pozostaje przeliczyć radiany na stopnie

$$\phi = 508°$$

Zatem nasz punkt przebył jeden pełny obrót i trochę mniej niż połowę obrotu.



Następnie określimy prędkości. Wiemy, że pochodna drogi będzie równa prędkości liniowej.

$$V = \frac{ds}{dt}$$

$$V = \frac{d(0{,}5 + 0{,}06t + 0{,}1t^3)}{dt} = 0{,}06 + 0{,}3t^2$$

$$V(t_1) = 0{,}06 + 0{,}3 * 5^2 = 7{,}56\,m/s$$

dodatkowo to wiemy, że

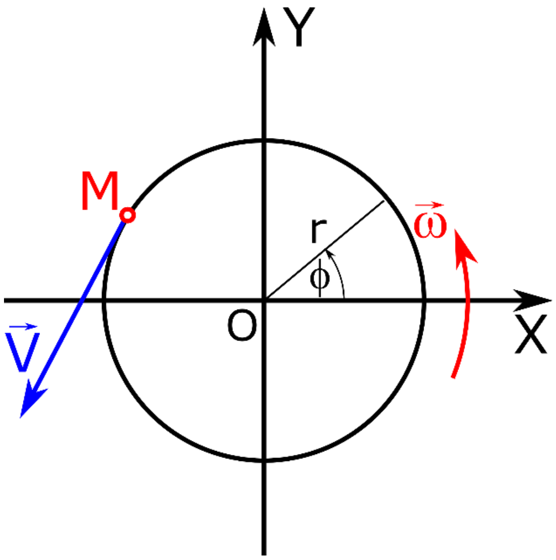
$$V = \omega * r$$

gdzie po transformacji mamy

$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{0{,}06 + 0{,}3t^2}{1{,}5}$$

$$\omega(t_1) = \frac{0{,}06 + 0{,}3 * 5^2}{1{,}5} = 5{,}04$$

Znając wartości prędkości, możemy teraz umieścić je na rysunku. Ponieważ założyliśmy, że punkt porusza się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a wartość prędkości kątowej $\vec{\omega}$ ma znak dodatni, musi on również obracać się w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Dodatkowo, korzystając z reguły prawej śruby, możemy określić, że zwrot wektora prędkości kątowej $\vec{\omega}$ będzie skierowany w naszą stronę. Prędkość liniową $\vec{V}$ należy narysować na stycznej do toru, a zwrot tej prędkości musi być zgodny z obrotem prędkości kątowej.



Po prędkościach możemy przejść do przyspieszeń.

Biorąc pod uwagę poprzednie informacje, wiemy o tym

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}$$

$$a_\tau = \frac{d(0{,}06 + 0{,}3t^2)}{dt} = 0{,}6t$$

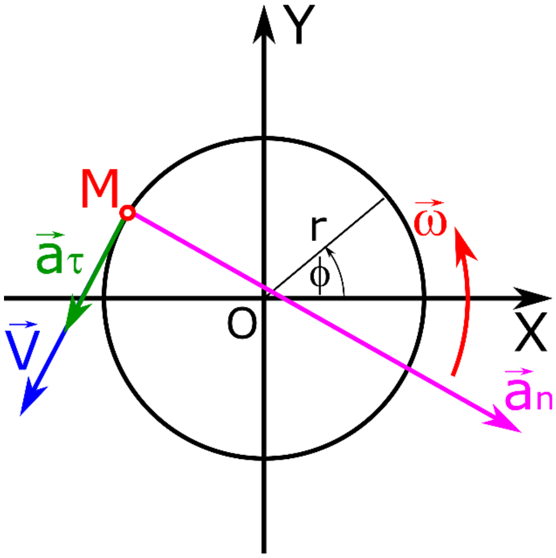
$$a_\tau(t_1) = 0{,}6 * 5 = 3$$

oraz

$$a_n = \frac{V^2}{r}$$

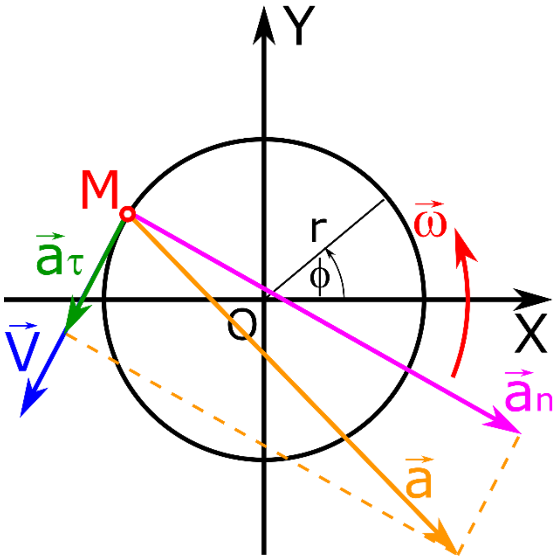
$$a_n(t_1) = \frac{7{,}56^2}{1{,}5} = 38{,}1$$

Znając wartości składowych przyspieszenia możemy je umieścić na naszym rysunku. Przyspieszenie styczne będzie przebiegać na kierunku prędkości liniowej, a jego zwrot będzie taki sam jak zwrot prędkości liniowej, ponieważ mamy wartość dodatnią. Natomiast przyspieszenie normalne będzie w kierunku prostopadłym do kierunku przyspieszenia stycznego, a jego zwrot będzie zawsze w kierunku osi obrotu.



W następnym kroku możemy wyznaczyć liniowe przyspieszenie punktu

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{3^2 + 38{,}1^2} = 38{,}22$$

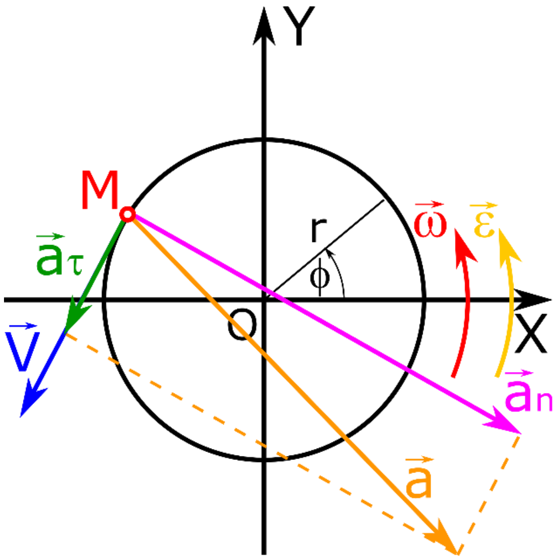


Na koniec pozostaje określenie przyspieszenia kątowego ε. Możemy to zrobić za pomocą równania

$$a_\tau = \varepsilon * r$$

$$\varepsilon = \frac{a_\tau}{r}$$

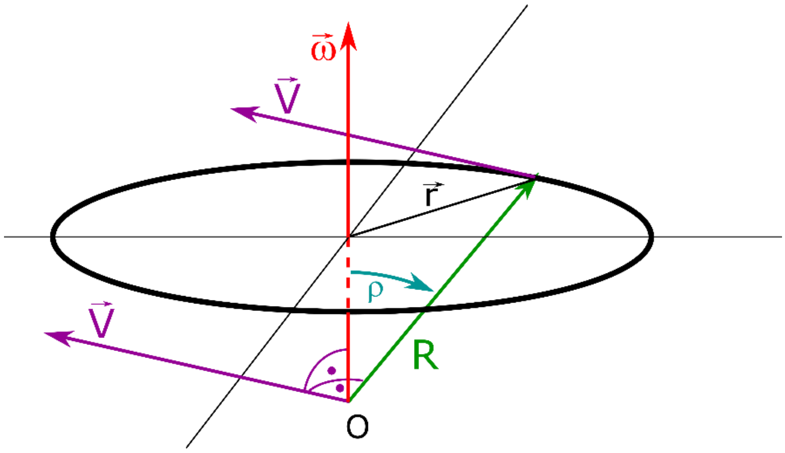
$$\varepsilon(t_1) = \frac{a_\tau}{r} = \frac{3}{1,5} = 2$$



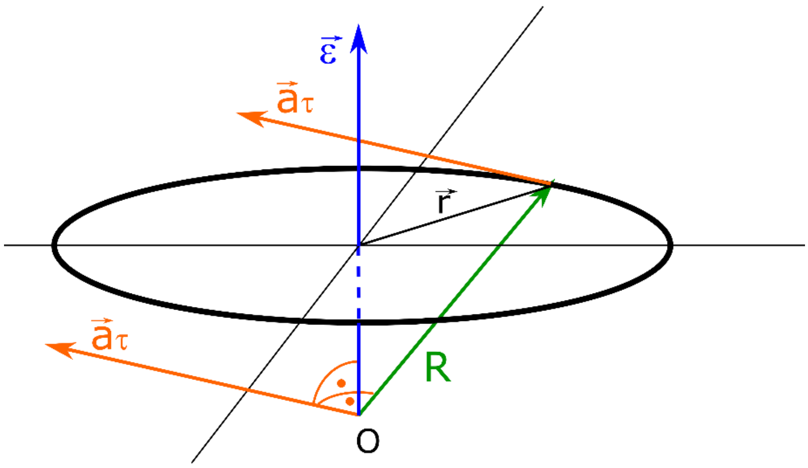
Ponieważ uzyskaliśmy dodatnią wartość przyspieszenia kątowego, będzie się ono obracało zgodnie z obrotem prędkości kątowej.

Na koniec przedstawiono zależności między wielkościami wektorowymi w poprzednich równaniach.

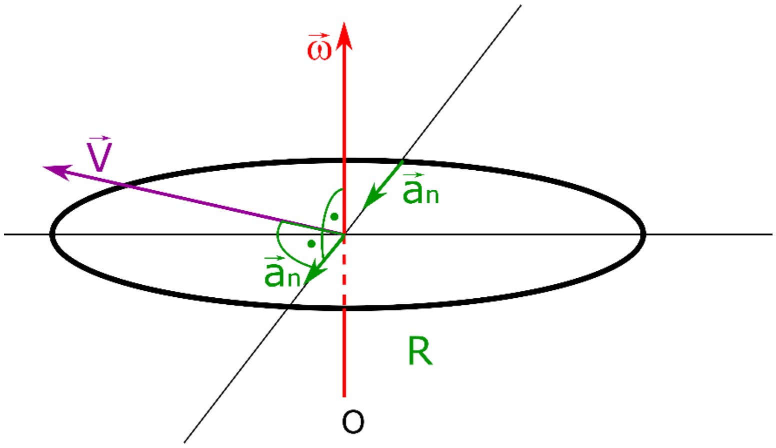
Pierwszy rysunek dotyczy prędkości liniowej i kątowej



Drugi rysunek odnosi się do przyspieszenia stycznego



Ostatni rysunek dotyczy przyspieszenia normalnego.



ω
V
an
an
R
O